МГЗПИ

В. К. Смышляев

Практикум по решению задач школьной математики

Министерство просвещения РСФСР

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. К. Смышляев

ПРАКТИКУМ
по решению задач школьной математики

ВЫПУСК V

Практикум по решению задач повышенной трудности

Учебное пособие для студентов—заочников V курса физико-математических факультетов педагогических институтов

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1978

Рекомендовано к печати Главным управлением
высших и средних педагогических учебных заведений
Министерства просвещения РСФСР

Редактор МГЗПИ *О. А. Павлович*

Рецензенты: *Н. Г. Килина, Г. А. Кудреватов, А. Г. Мордкович, И. И. Цейтлин, Н. Н. Шунда*

С $\frac{60602-592}{103(03)-78}$ — заказное

«Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!»
Д. Пойа, *Математическое открытие*, с. 13.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Умение решать задачи является одним из важнейших элементов математической подготовки будущего учителя математики.

Настоящее пособие представляет собой выпуск V «Практикума по решению задач школьной математики», издаваемого МГЗПИ в помощь студентам-заочникам. Его цель — познакомить студентов с различными методами решения задач повышенной трудности, в том числе олимпиадных и конкурсных задач.

При составлении настоящего пособия автору предстояло из тысяч полезных и по-своему интересных задач выбрать совсем небольшое количество. Будучи ограниченным тематикой и количеством, автор стремился отобрать и составить такие задачи, которые были бы достаточно разнообразны, требовали бы от решающего самостоятельности мысли, не были бы шаблонными. Впрочем, последнее понятие весьма относительно. Давно ли многие задачи (например, на неравенства, экстремумы) считались «нестандартными», а теперь они вошли в программу средней школы. Нестандартность отобранных автором задач состоит скорее всего не в их сложности, а в необычности. Хочется надеяться, что многие «нестандартные» задачи и «нешаблонные» методы решения скоро приобретут равные права с уже привычными задачами и приемами их решения.

В пособии были использованы книги из серий «Библиотека математического кружка» и «Библиотечка физико-математической школы», сборники олимпиадных задач, пособия для поступающих в вузы, журналы «Математика в школе», «Математическое просвещение», «Квант», «Наука и жизнь», математические журналы стран народной демократии. Разумеется, отобранные задачи не являются самыми трудными, самыми интересными. Вне «Практикума» остались многие не менее необходимые темы и задачи (например, задачи, связанные с понятием абсолютной величины, задачи на делимость, геометрические задачи, решаемые с помощью векторной алгебры и с помощью тригонометрии, задачи на построение и др.).

Настоящее пособие является первым приближением к осуществлению задач, поставленных перед «Практикумом», оно не претендует на полноту их решения. Автор с благодарностью примет все полезные замечания и предложения, способствующие улучшению сборника.

Программа «Практикума» не может быть стабильной и одинаковой для всех педвузов, и поэтому ее содержание должно определяться математическими кафедрами педвузов с учетом научных интересов преподавателей, ведущих «Практикум», и состава студентов.

Пособие состоит из трех глав. В первой главе «Уравнения» рассмотрены уравнения высших степеней, уравнения в целых числах, функциональные уравнения, уравнения с целой частью (антье), некоторые «нестандартные» уравнения и системы уравнений.

Во второй главе разобраны задачи на доказательство неравенств и на нахождение экстремумов с использованием понятия среднего степенного любого порядка от конечного числа положительных чисел.

Третья глава включает различные олимпиадные задачи из алгебры и геометрии.

Каждый параграф «Практикума» построен таким образом, что сначала приводятся краткие теоретические сведения и образцы решения наиболее типичных задач, а затем даются упражнения для самостоятельного решения.

При работе с «Практикумом» рекомендуется не сразу знакомиться с приведенными образцами решений, а попытаться решить задачу самостоятельно. Не торопитесь заглядывать и в раздел «Ответы и указания». Автор не предполагает также, что нужно решить все или почти все задачи по каждой теме. В этом нет необходимости.

В этой книге вы не найдете волшебного слова, открывающего все пути решения, — она не научит и не может научить вас решать все задачи, но хочется надеяться, что она окажется вам полезной.

Большинство приводимых решений задач носит «чистовой» характер, т. е. содержит уже переработанный, лаконичный текст окончательного решения. Часть решений дана в «черновом» варианте («черновое» решение), отражающем поисковую стадию решения, сам путь к «чистовому» решению.

Студентам-заочникам полезно познакомиться с замечательными книгами Д. Пойа «Как решать задачу», «Математика и правдоподобные рассуждения», «Математическое открытие».

Глава I

УРАВНЕНИЯ

§ 1. Уравнения высших степеней

Задачи на вычисление рациональных корней. Пусть

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

— уравнение n-й степени ($n > 1$) с целыми коэффициентами. Известно, что:

1°. *Если несократимая дробь* $\frac{p}{q}$ *(где* $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$*) является рациональным корнем уравнения* (1) *с целыми коэффициентами, то* p *есть делитель свободного члена* a_0, *а* q *— делитель старшего коэффициента* a_n.

2°. *Целый корень уравнения* (1), *если он существует, должен быть делителем свободного члена.*

3°. *Если в уравнении* (1) *старший коэффициент* $a_n = 1$, *то рациональные корни этого уравнения — целые числа.*

Таким образом, испытывая всевозможные дроби $\frac{p}{q}$, где p — делитель a_0, а q — делитель a_n, найдем рациональные корни уравнения (1) или убедимся, что уравнение (1) рациональных корней не имеет.

Процесс испытания всех делителей свободного члена может оказаться весьма громоздким, поэтому обычно при вычислении целых корней пользуются следующим замечанием:

4°. *Испытанию подлежат лишь те делители* a *свободного члена* a_0 *(отличные от* 1 *или* —1*), для которых каждое из частных* $\frac{f(1)}{a-1}$ *и* $\frac{f(-1)}{a+1}$ *является целым числом.*

Пример 1. Построены выпуклые четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник и т. д. Сумма длин всех диагоналей этих многоугольников равна 800. Сколько многоугольников построено?

Решение. Прежде всего найдем число диагоналей выпуклого n-угольника.

Если временно отвлечься от понятия n-угольника, а считать, что на плоскости заданы n точек, то, соединяя эти n точек между собой, легко подсчитать, что число соединяющих отрезков равно C_n^2, где $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ — число сочетаний из n элементов по 2.

В это число вошли n сторон n-угольника, поэтому число диагоналей выпуклого n-угольника равно:

$$\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}.$$

Теперь можно перейти непосредственно к решению задачи. Пусть x — число многоугольников, тогда последний многоугольник будет иметь $x+3$ сторон.

В соответствии с условием задачи, придавая n значения, равные 4, 5, ..., $(x+3)$, получим уравнение

$$\frac{4(4-3)}{2}+\frac{5(5-3)}{2}+\dots+\frac{(x+3)(x+3-3)}{2}=800,$$

которое легко преобразуется к следующему виду:

$$(4^2+5^2+\dots+(x+3)^2)-3(4+5+\dots+(x+3))=1600.$$

По формуле суммы квадратов первых k натуральных чисел

$$S_k=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

найдем, что

$$\sum_{k=1}^{x+3}k^2=\frac{(x+3)(x+4)(2x+7)}{6}.$$

Вторая сумма вычисляется по формуле суммы членов арифметической прогрессии:

$$4+5+\dots+(x+3)=\frac{(x+7)x}{2}.$$

Таким образом, уравнение примет вид:

$$\frac{(x+3)(x+4)(2x+7)}{6}-(1^2+2^2+3^2)-\frac{3x(x+7)}{2}=1600,$$

или

$$x^3+6x^2+5x-4800=0. \qquad (1)$$

Испытывая делители свободного члена, находим, что $x_1=15$. Разделив многочлен $x^3+6x^2+5x-4800$ на $(x-15)$ (по схеме Горнера), найдем частное. Значит, исходное уравнение примет следующий вид:

$$(x-15)(x^2+21x+320)=0.$$

Находим, что $x=15$. Других рациональных корней нет.

Замечание. Уравнение (1) можно представить в виде

$$x(x+1)(x+5)=4800.$$

Поскольку по условию x — натуральное число, а $4800=15\cdot16\cdot20$, то непосредственно находим, что $x=15$.

П р и м е р 2. Установим, в какой системе счисления произведено следующее умножение: $352 \cdot 31 = 20\ 152$.

Р е ш е н и е. Пусть x — основание системы счисления, тогда заданное равенство можно записать в виде уравнения

$$(3x^2 + 5x + 2)(3x + 1) = 2x^4 + x^2 + 5x + 2.$$

Выполнив умножение и приведение подобных членов, получим:

$$2x^4 - 9x^3 - 17x^2 - 6x = 0.$$

Ясно, что $x \neq 0$ и потому уравнение примет вид:

$$2x^3 - 9x^2 - 17x - 6 = 0.$$

Поскольку x как основание системы счисления может принимать только натуральные значения, то среди делителей свободного члена испытанию подлежат лишь числа 1, 2, 3, 6. Если учесть к тому же, что в заданном равенстве цифра 5 самая большая, то остается проверить только $x = 6$.

Разделим многочлен $2x^3 - 9x^2 - 17x - 6$ на $(x - 6)$ по схеме Горнера:

	2	—9	—17	—6
6	2	3	1	0

В остатке получили нуль. Это значит, что $x = 6$ — корень полученного уравнения и является основанием искомой системы счисления.

П р и м е р 3. Решим тригонометрическое уравнение

$$5 \cos 3x + 3 \cos x = 3 \sin 4x.$$

Р е ш е н и е. С помощью формул

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

и

$$\sin 4x = 4 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

приведем уравнение к следующему виду:

$$20 \cos^3 x - 12 \cos x = 12 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x),$$

или

$$\cos x (5 \cos^2 x - 3 - 3 \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x)) = 0.$$

Отсюда: 1) $\cos x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$;

2) $5 \cos^2 x - 3 - 3 \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$.

Выразив $\cos^2 x$ через $\sin^2 x$, получим уравнение

$$6t^3-5t^2-3t+2=0,$$

где $t=\sin x$.

Будем испытывать следующие рациональные числа: ± 1, ± 2, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{6}$, где числитель является делителем 2, а знаменатель — делителем 6. Находим, что $t_1=1$ — корень уравнения. Разделив по схеме Горнера на $(t-1)$, получим уравнение

$$6t^2+t-2=0,$$

откуда $t_2=\frac{1}{2}$ и $t_3=-\frac{2}{3}$.

Значит, $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x_2=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$,

$$x_3=(-1)^{p+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi p,\ k,\ n,\ p\in\mathbf{Z}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. В какой системе счисления справедливо равенство $312^2=$ $=107\,444$?

2. В какой системе счисления при делении числа 4634 на число 555 получается в частном 5, а в остатке 530?

3. Объем прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием равен 36, длина диагонали одной из боковых граней равна 5. Найдите длину стороны основания параллелепипеда.

4. Электрическая цепь состоит из четырех параллельно соединенных проводников. Сопротивление всей цепи равно $1\frac{1}{19}$ Ом. Определите сопротивление каждого из проводников, если известно, что по величине сопротивления последовательно отличаются друг от друга на 1 Ом.

5. Из сосуда с чистым спиртом отлили 4 л спирта, после чего сосуд долили четырьмя литрами воды. Затем отлили 4 л смеси и долили 4 л воды и т. д. После третьей операции в сосуде оказалось чистого спирта на 2,5 л больше, чем воды. Сколько литров спирта было в сосуде первоначально?

6. На конгруэнтных боковых ребрах тетраэдра $DABC$ отложены отрезки, причем $|AA_1|=3$, $|BB_1|=4$, $|CC_1|=5$. Плоскость, проходящая через точки A_1, B_1, C_1, делит объем тетраэдра в отношении 7 : 17. Определите длины боковых ребер тетраэдра.

7. Периметр треугольника равен 20, сумма длин высот равна $\frac{131\sqrt{3}}{14}$, радиус описанной окружности равен $\frac{7\sqrt{3}}{3}$. Определите длины сторон этого треугольника.

8. Решите уравнения:

а) $\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x$; б) $7\sin x\cos^2 x+3\sin^3 x=3$;

в) $2\cos^2 4x+\sin^2 3x=1$; г) $\cos x=\cos^2\frac{3}{4}x$.

9. Докажите, что многочлен $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ с целыми коэффициентами не имеет целых корней, если $f(0)$ и $f(1)$ — нечетные числа.

10. Уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

где $a, b, c \in \mathbf{Q}$, имеет корень $x_1 = p + q\sqrt{r}$, где $p, q, r \in \mathbf{Q}$ и $r \neq k^2$. Докажите, что в этом случае уравнение имеет рациональный корень.

Задачи, решаемые с использованием формул Виета. Корни $x_1, x_2, \dots, x_n$ уравнения

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

где $n > 1$, $a_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2, \dots, n$, связаны между собой следующими соотношениями (формулы Виета):

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_1, \\ &x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = a_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_1x_2x_3 \dots x_n = (-1)^n a_n. \end{aligned}$$

Пример 1. Корни уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

образуют геометрическую прогрессию. Какому необходимому и достаточному условию должны удовлетворять коэффициенты уравнения?

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения. Из условия следует, что

$$x_2^2 = x_1x_3. \qquad (2)$$

Умножим обе части этого равенства на x_2: $x_2^3 = x_1x_2x_3$. Поскольку $x_1x_2x_3 = -c$, то

$$x_2^3 = -c. \qquad (3)$$

Кроме того, имеем:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ &x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b. \end{aligned}$$

Учитывая равенство (2), получаем:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_2^2 = b, \text{ или } x_2(-a) = b. \qquad (4)$$

Из равенств (3) и (4) следует зависимость между коэффициентами:

$$a^3c = b^3. \qquad (5)$$

Обратно, пусть уравнение имеет вид:

$$x^3 + ax^2 + bx + \frac{b^3}{a^3} = 0.$$

Сгруппируем члены уравнения следующим образом:

$$\left(x^3 + \frac{b^3}{a^3}\right) + ax\left(x + \frac{b}{a}\right) = 0,$$

или

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)\left(x^2 - \left(\frac{b}{a} - a\right)x + \frac{b^2}{a^2}\right) = 0.$$

Отсюда

$$x_2 = -\frac{b}{a} \quad (\text{или } x_2 = -\sqrt[3]{c}),$$

$$x_{1,3} = \frac{b - a^2 \pm \sqrt{a^4 - 2a^2b - 3b^2}}{2a}, \quad a \neq 0.$$

Теперь можем непосредственно проверить выполнимость условия:

$$x_2^2 = x_1x_3.$$

Если же $a = 0$, то из соотношения (5) следует: $b = 0$. И следовательно, уравнение примет вид:

$$x^3 + c = 0.$$

Если $c = 0$, то корнями являются числа $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Можно считать, что они образуют геометрическую прогрессию с первым членом, равным 0, и любым знаменателем q. Если же $c \neq 0$, то корнями уравнения являются три значения: $\sqrt[3]{-c}$, $\sqrt[3]{-c}\,\varepsilon_1$, $\sqrt[3]{-c}\,\varepsilon_2$, где $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Легко убедиться, что числа $\sqrt[3]{-c}\,\varepsilon_1, \sqrt[3]{-c}, \sqrt[3]{-c}\,\varepsilon_2$ образуют геометрическую прогрессию.

Пусть теперь $a \neq 0$. Тогда при $c = 0$ из соотношения (5) следует: $b = 0$. В этом случае уравнение имеет вид:

$$x^3 + ax^2 = 0.$$

Его корнями являются числа $-a$, 0, 0. Можно считать, что они образуют геометрическую прогрессию с первым членом a и знаменателем $q = 0$.

Таким образом, для того чтобы корни исходного уравнения образовывали геометрическую прогрессию, необходимо и достаточно выполнение соотношения $a^3c = b^3$.

П р и м е р 2. Найдем сумму кубов корней уравнения

$$x^3 + 2x^2 + x - 3 = 0.$$

Р е ш е н и е. Это можно выполнить различными путями, например последовательно вычисляя сначала сумму квадратов корней, а затем сумму кубов корней. Мы же воспользуемся часто применяемым в математике тождеством

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - \\ - ac - bc).$$

В нашем случае это тождество примет вид:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1x_2x_3 + (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + \\ + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1).$$

Выразим $S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ через σ_1, σ_2 и σ_3, где $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, $\sigma_3 = x_1x_2x_3$.

Сумму $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ легко выразить через σ_1 и σ_2:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Окончательно получим:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Поскольку по условию (по формулам Виета) $\sigma_1 = -2$,

$$\sigma_2 = 1,\ \sigma_3 = 3, \text{ то } x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 7.$$

Пример 3. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим тройку переменных x, y, z как корни некоторого кубического уравнения $t^3 + at^2 + bt + c = 0$ и найдем коэффициенты a, b, c.

По формулам Виета

$$\sigma_1 = -a,\ \sigma_2 = b,\ \sigma_3 = -c.$$

Но в силу предыдущего примера

$$x^2 + y^2 + z^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = a^2 - 2b,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = -a^3 + 3ab - 3c.$$

Подставляя эти выражения в исходную систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} -a = 2, \\ a^2 - 2b = 6, \\ -a^3 + 3ab - 3c = 8, \end{cases}$$

откуда легко находим: $a = -2$, $b = -1$, $c = 2$.

Следовательно, искомое уравнение примет вид:

$$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0,$$

или

$$(t^2 - 1)(t - 2) = 0.$$

Его корни: -1, 1, 2. А так как исходная система симметрическая, то любая комбинация этой тройки чисел является ее решением.

УПРАЖНЕНИЯ

11. Составьте уравнение, корнями которого будут длины радиусов r_a, r_b, r_c вневписанных окружностей.

12*. Составьте кубическое уравнение, корни которого равны

$$\cos\frac{\pi}{7},\ \cos\frac{3\pi}{7},\ \cos\frac{5\pi}{7}.$$

13*. Найдите сумму 16-х степеней корней уравнения

$$x^3 - x + 1 = 0.$$

14. Вычислите площадь четырехугольника, длины сторон которого являются корнями уравнения $x^4 + kx^3 + mx^2 + nx + 5 = 0$, а сумма величин противоположных углов равна π.

15. Если уравнение $ax^3 - 3bx^2 + 3cx - d = 0$ имеет корни $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{d}{c}$, то эти корни или равны, или образуют арифметическую прогрессию. Докажите.

16. Вычислите значения выражений: $x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2$; $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2$, если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 - x + 3 = 0$.

17. Найдите действительные корни систем уравнений:

а) $\begin{cases} x + y + z = 4, \\ xy + yz + zx = 5, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{5}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = \dfrac{73}{8}, \\ xy + xz + yz = x + y + z, \\ xyz = 1. \end{cases}$

18. Дано уравнение

$$x^3 + px^2 + qx + z = 0.$$

Найдите соотношение между коэффициентами, при котором один корень равен сумме двух других.

19. Дано уравнение $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, в котором: а) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$; б) $x_1x_2 = x_3x_4$. Найдите соотношение между коэффициентами. Найдите способы решения уравнения при этих условиях.

20. Установите, какому условию должны удовлетворять коэффициенты уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, чтобы три его корня составляли арифметическую прогрессию.

21. Какому необходимому и достаточному условию удовлетворяют коэффициенты уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, где $r \neq 0$, $q \neq 0$, если его корни связаны соотношением $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}$?

22. Определите λ так, чтобы один из корней уравнения $x^3 + 7x + \lambda = 0$ равнялся удвоенному второму.

Задачи на составление уравнений 3-й и 4-й степеней. Решения приведенных в этом разделе геометрических задач в основном сводятся к решению возвратных или других уравнений, которые в свою очередь соответствующим образом можно свести к квадратным уравнениям.

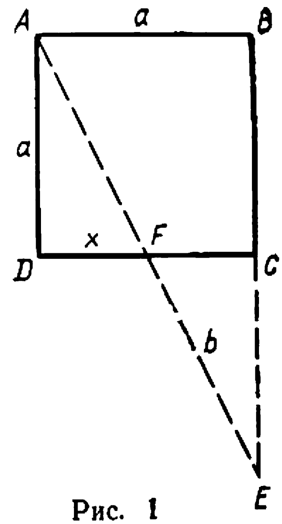

Рис. 1

Рассмотрим это на конкретном примере.

Пример 1. Из вершины A данного квадрата $ABCD$ ($|AB| = a$) провести прямую AE, пересекающую продолжение стороны $[BC]$ в точке E, а сторону $[DC]$ в точке F так, чтобы $|EF| = b$.

Решение. Имеем (рис. 1): $|AB| = a$, $|EF| = b$.

Пусть $|DF| = x$. Тогда $\frac{x}{a-x} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{b}$, где $x < a$, или $x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - b^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$.

Разделим на x^2:

$$x^2 + \frac{a^4}{x^2} - 2a\left(x + \frac{a^2}{x}\right) + 2a^2 - b^2 = 0. \qquad (1)$$

Положим, $x + \frac{a^2}{x} = y$. Поскольку

$$y^2 = \left(x + \frac{a^2}{x}\right)^2 = x^2 + 2a^2 + \frac{a^4}{x^2},$$

то

$$x^2 + \frac{a^4}{x^2} = y^2 - 2a^2$$

и уравнение (1) примет вид:

$$y^2 - 2ay - b^2 = 0.$$

Отсюда $y = a + \sqrt{a^2+b^2}$, так как $y > 0$. Тогда $x + \frac{a^2}{x} = a + \sqrt{a^2+b^2}$, или $x^2 - (a + \sqrt{a^2+b^2})\,x + a^2 = 0$. Оба корня положительны, так как $a^2 > 0$ и $a + \sqrt{a^2+b^2} > 0$. Находим x:

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2+b^2} \pm \sqrt{b^2 + 2a\sqrt{a^2+b^2} - 2a^2}}{2}.$$

Задача имеет одно решение при любых значениях a и b, так как один из корней не удовлетворяет условию $x < a$.

Значит,

$$|DF| = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{b^2 + 2a\sqrt{a^2+b^2} - 2a^2}\right).$$

Если же в условии задачи приведены числовые данные, то искомые иррациональные корни обычно находят известными приближенными методами (например, методами хорд, касательных, итерации и др.). Наиболее простыми являются способ деления сегмента пополам и способ проб. Сущность последних заключается в следующем.

Пусть в процессе решения задачи получено уравнение, например, 4-й степени:

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \qquad (2)$$

Сначала отделим искомый корень. Если $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$, то искомый корень находится между a и b. Затем возьмем в качестве первого приближения $x_0 = \frac{a+b}{2}$ — середину отрезка $[a; b]$ и вычислим $f(x_0)$. Если при этом получится, что $f(x_0) = 0$, то x_0 — корень. Если же значение $f(x_0)$ довольно близко к нулю, то можно положить $x = x_0 + z$, где z — число, близкое к нулю ($z \approx 0$). Подставив $x = x_0 + z$ вместо x в уравнение (2) и отбросив члены, содержащие z^3 и z^4 (в виду их малости), получим квадратное уравнение относительно z. Решив его, найдем z, а затем и приближенное значение $x = x_0 + z$, т. е. приближенное значение корня данного уравнения.

Если же $f(x_0)$ сравнительно далеко от нуля и, например, $f(x_0) > 0$, то берем $x_1 = \frac{a + x_0}{2}$ за второе приближение и вычислим $f(x_1)$. Если при этом $f(x_1)$ довольно близко к нулю, то полагаем: $x = x_1 + z$, где $z \approx 0$. И уравнение решаем так, как сказано выше.

Пример 2. Найдем величины углов прямоугольного треугольника ($\widehat{C} = 90°$), у которого длины радиусов r_a, r_b, r_c вневписанных кругов составляют геометрическую прогрессию.

Решение. Так как r_a, r_b, r_c образуют геометрическую прогрессию, то

$$r_a \cdot r_c = r_b^2. \qquad (3)$$

Из курса геометрии известно, что

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{\widehat{A}}{2}, \quad r_b = p \operatorname{tg} \frac{\widehat{B}}{2}, \quad r_c = p \operatorname{tg} \frac{\widehat{C}}{2} = p \quad (\text{так как } \widehat{C} = 90°).$$

Подставив эти выражения в равенство (3) и сократив на p^2, получим.

$$\operatorname{tg} \frac{\widehat{A}}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\widehat{B}}{2}.$$

Так как $\widehat{A} = 90° - \widehat{B}$, то

$$\operatorname{tg} \frac{90° - \widehat{B}}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\widehat{B}}{2},$$

или

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}\right) = \operatorname{tg}^2 \frac{\widehat{B}}{2}.$$

Преобразуем полученное равенство

$$\frac{1 - \operatorname{tg}\dfrac{\widehat{B}}{2}}{1 + \operatorname{tg}\dfrac{\widehat{B}}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{\widehat{B}}{2}.$$

Положив $\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}}{2} = x$, запишем уравнение

$$x^3 + x^2 + x - 1 = 0.$$

Поскольку $0 < \frac{\widehat{B}}{2} < 45^\circ$, то $0 < x < 1$. Так как $f(0) = -1 < 0$, а $f(1) = 2 > 0$, то корень уравнения находится в интервале $]0;\ 1[$.

Возьмем $x = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$. Тогда $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} < 0$.
Мы получили довольно близкий к нулю результат, причем $\frac{1}{2} < x < 1$.

Положив $x = \frac{1}{2} + z$, где $0 < z < 1$ $(z \approx 0)$,
получим:

$$z^3 + \frac{5}{2}z^2 + \frac{11}{4}z - \frac{1}{8} = 0.$$

Опустив z^3 в виду малости, запишем квадратное уравнение

$$\frac{5}{2}z_1^2 + \frac{11}{4}z_1 - \frac{1}{8} = 0.$$

Найдем положительное значение z_1:

$$z_1 = \frac{-11 + \sqrt{141}}{20} \approx \frac{-11 + 11{,}87}{20} \approx 0{,}0437.$$

Итак, $\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}}{2} \approx 0{,}5 + 0{,}0437 = 0{,}5437$; $\widehat{B} \approx 57^\circ 4'$, $\widehat{A} \approx 32^\circ 56'$.

Оценим модуль разности $z_1 - z$. Имеем:

$$z^3 = \frac{5}{2}(z_1^2 - z^2) + \frac{11}{4}(z_1 - z).$$

Так как $z_1 > z$, то

$$z^3 > \frac{11}{4}(z_1 - z)$$

и

$$|z_1 - z| < \frac{4}{11}z^3 < \frac{4}{11}z_1^3 = \frac{4}{11}(0,0437)^3 < \frac{4}{11}(0,05)^3 \approx 0,00005.$$

Точность, как видим, получилась более чем достаточная.

УПРАЖНЕНИЯ

23. В треугольнике ABC длины высоты $[CD]$ и сторон $[BC]$, $[CA]$ и $[AB]$ образуют геометрическую прогрессию. Найдите $|CA|$ и $|AB|$, если $|BC| = a$.

24. В прямоугольном треугольнике ABC ($\widehat{C} = 90°$) проведен $[DE] \parallel [BC]$ так, что $|AD| = |BC|$ и $D \in [AC]$, $E \in [AB]$. Определите $|AE|$, если $|BC| = a$ и $|BE| = b$.

25. В окружности с центром O проведены взаимно перпендикулярные радиус $[OC]$ и секущая (OM). На секущей найти точку A такую, чтобы внешняя часть $[AD]$ секущей (AC) имела данную длину.

26*. Через диагональ грани куба постройте сечение, равновеликое его грани.

27. Шар радиуса $R = 1$ разделен плоскостями на три равновеликие части. Найдите длины высот шарового сегмента и шарового пояса.

28. Сосуд, имеющий форму полушара, доверху наполнен водой. На какой угол следует его наклонить, чтобы половина воды вылилась?

29. Шар разделен параллельными плоскостями на 4 равные по объему части. В каком отношении разделилась поверхность шара?

30. Найдите правильную четырехугольную пирамиду, у которой плоские углы при вершине конгруэнтны двугранным углам при основании.

31. В правильной шестиугольной пирамиде величина угла между боковым ребром и плоскостью основания в полтора раза больше величины плоского угла при вершине пирамиды. Найдите эти углы.

32. В правильной треугольной пирамиде величина двугранного угла при основании относится к величине угла между боковым ребром и плоскостью основания, как 4 : 3. Найдите эти углы.

33. Найдите правильную четырехугольную пирамиду, у которой величина двугранного угла при боковом ребре в полтора раза больше величины угла между боковым ребром и плоскостью основания.

§ 2. Уравнения в целых числах

Решить уравнение $f(x, y, ..., z) = 0$ в целых числах — значит найти все кортежи $(a, b, ..., c)$ целых чисел, удовлетворяющие данному уравнению, или убедиться, что ни одного такого кортежа нет.

Простейшими уравнениями в целых числах (неопределенными уравнениями) являются уравнения 1-й степени с двумя неизвестными, т. е. уравнения вида $ax + by = c$, где a, b, $c \in \mathbf{Z}$. На них мы останавливаться не будем.

Решения же неопределенных уравнений высших степеней, и даже второй степени, представляют значительные трудности.

Практически при решении этих уравнений чаще всего используются свойства целых чисел и различные соотношения, связывающие их: делимость, кратность, разложение на простые множители, взаимная простота чисел, НОД, НОК и др. Именно эти свойства и соотношения в основном мы будем применять при решении следующих неопределенных уравнений. Иногда нами будет использоваться теория сравнений по модулю.

Пример 1. Решим в целых числах уравнение

$$2x^2 + 3xy + y^2 = 35.$$

Решение. Разложив левую часть уравнения на линейные множители, получим уравнение

$$(2x + y)(x + y) = 35. \qquad (1)$$

Так как $35 = 5 \cdot 7 = (-5) \cdot (-7) = 1 \cdot 35 = (-1) \cdot (-35)$ и $x, y \in \mathbf{Z}$, то возможны восемь случаев выполнения равенства (1):

$$1)\ \begin{cases} 2x + y = 7, \\ x + y = 5; \end{cases} \qquad 5)\ \begin{cases} 2x + y = 35, \\ x + y = 1; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + y = 7; \end{cases} \qquad 6)\ \begin{cases} 2x + y = 1, \\ x + y = 35; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 2x + y = -7, \\ x + y = -5; \end{cases} \qquad 7)\ \begin{cases} 2x + y = -35, \\ x + y = -1; \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} 2x + y = -5, \\ x + y = -7; \end{cases} \qquad 8)\ \begin{cases} 2x + y = -1, \\ x + y = -35. \end{cases}$$

Решая эти системы, находим следующие пары чисел, являющиеся решениями исходного уравнения:

$$(2; 3),\ (-2; 9),\ (-2; -3),\ (2; -9),\ (34; -33),\ (-34; 69),$$
$$(-34; 33),\ (34; -69).$$

Пример 2. Докажем, что уравнение $x^2 + 4x - 11 = 8y$ не имеет решений в целых числах.

Решение. 1-й способ. Преобразуем данное уравнение:

$$x^2 - 11 = 8y - 4x.$$

Правая часть $8y - 4x$ при любых целых x и y четна. Левая же часть уравнения, если оно имеет решения, может быть четной только при нечетном x^2 и, следовательно, нечетном x.

Теперь уравнение запишем в следующем виде:

$$x^2 + 4x + 3 - 8y = 14,$$

или

$$(x+1)(x+3)-8y=14. \qquad (2)$$

Если x нечетно, то $x+1$ и $x+3$ — два последовательных четных числа, а потому их произведение кратно 8. Поскольку $8y$ тоже кратно 8, то левая часть уравнения кратна 8. Однако правая часть (14) не делится на 8. Следовательно, уравнение (2), а вместе с ним и данное уравнение не имеют решений ни при каких целых x и y.

2-й способ. Преобразуем данное уравнение, выделив полный квадрат в правой части:

$$(x+2)^2-15=8y.$$

Пусть $x+2=z$. Перейдем теперь к сравнению по модулю 8:

$$z^2 \equiv 7 \pmod 8, \qquad (3)$$

так как $15 \equiv 7 \pmod 8$.

Сравнение (3) не имеет решений, так как не существует квадрата натурального числа, которое при делении на 8 давало бы в остатке 7. В самом деле, если $z=8k$, то $z^2 \equiv 0 \pmod 8$; если $z = 8k \pm 1$, то $z^2 \equiv 1 \pmod 8$; если $z=8k \pm 2$, то $z^2 \equiv 4 \pmod 8$; если $z=8k \pm 3$, то $z^2 \equiv 1 \pmod 8$, и, наконец, если $z=8k \pm 4$, то $z^2 \equiv 0 \pmod 8$.

Пример 3. Решим в целых числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2-y^2-z^2=1, \\ y+z-x=3. \end{cases}$$

Решение. Выразим из второго уравнения x через y и z и подставим в первое:

$$yz-3y-3z+4=0.$$

Отсюда

$$y=\frac{3z-4}{z-3}=3+\frac{5}{z-3}.$$

Так как $y \in \mathbf{Z}$, то $\frac{5}{z-3} \in \mathbf{Z}$. А это возможно лишь при условии $z-3=\pm 1$ и $z-3=\pm 5$.

Таким образом, получаем: $z_1=4$, $z_2=2$, $z_3=8$, $z_4=-2$, затем находим соответствующие значения x и y. Тогда решение системы запишем в виде

$$\{(9;\ 8;\ 4),\ (-3;\ -2;\ 2),\ (9;\ 4;\ 8),\ (-3;\ 2;\ -2)\}.$$

Пример 4. Докажем, что уравнение

$$x^2+y^2+z^2=2xyz \qquad (4)$$

неразрешимо в натуральных числах.

Решение. Применим так называемый метод «бесконечного спуска». Положим противное.

Пусть данное уравнение разрешимо в натуральных числах. Правая часть уравнения делится на 2, следовательно, и его левая часть делится на 2. Это возможно лишь тогда, когда либо x, y, z — четные числа, либо одно из них четное, а два других нечетные. В последнем случае правая часть уравнения делится на 4, а левая — только на 2. Значит, остается положить, что числа x, y, z четные, т. е.

$$x = 2x_1,\ y = 2y_1,\ z = 2z_1,$$

тогда уравнение (4) примет вид:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1. \tag{5}$$

Применив к уравнению (5) те же рассуждения, что и к уравнению (4), запишем: $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$,

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 8x_2y_2z_2.$$

Соотношения $x_k = 2x_{k+1}$ приводят к бесконечной последовательности натуральных чисел $x > x_1 > x_2 > \ldots > x_k > x_{k+1} > \ldots$ Но эта последовательность должна быть конечной. Следовательно, наше предположение не является верным и уравнение (4) в натуральных числах неразрешимо.

Пример 5. Решим в целых числах уравнение

$$3^x - 2^y = 1.$$

Решение. Одно решение очевидно: (1; 1).

Нетрудно заметить, что уравнение не может иметь отрицательных и нулевых решений. Поэтому будем искать решения, большие 1.

Перепишем уравнение в таком виде: $2^y = 3^x - 1$.
Так как $x \in \mathbf{N}$, то правую часть уравнения можно разложить на множители и тогда получим:

$$2^y = (3 - 1)(3^{x-1} + 3^{x-2} + \ldots + 3 + 1),$$

или

$$2^{y-1} = 3^{x-1} + \ldots + 3 + 1.$$

Так как левая часть уравнения кратна 2 (при $y > 1$ и $y \in \mathbf{N}$), то сумма в правой части должна делиться на 2. Каждое слагаемое в этой сумме нечетно, поэтому число их должно быть четным. Значит, $x = 2k$.

Применив формулу суммы геометрической прогрессии, данное уравнение приведем к виду:

$$2^y = 3^{2k} - 1,$$

или

$$2^y = (3^k + 1)(3^k - 1).$$

Отсюда следует, что $3^k + 1$ и $3^k - 1$ являются степенями числа 2. Но это может быть только при $k = 1$. В самом деле, если $3^k + 1 = 2^p$ и $3^k - 1 = 2^q$, то $p > q$ и $2 \cdot 3^k = 2^p + 2^q = 2^q \times (2^{p-q} + 1)$.

Так как $2 \cdot 3^k$ делится только на первую степень числа 2, то $q = 1$. Отсюда $3^k = 1 + 2 = 3$, $k = 1$. И мы получаем другое решение: (2; 3).

Пример 6. Найдем четырехзначное число, являющееся полным квадратом, если равны его первые две цифры и последние две.

Решение. Пусть $N = \overline{xxyy}$ — искомое число. Запишем его в виде систематического числа при основании 10 и упростим:

$$N = 1000x + 100x + 10y + y,$$
$$N = 1100x + 11y,$$
$$N = 11\,(100x + y).$$

Так как (по условию) N — квадрат некоторого натурального числа, то второй множитель $100x + y$ должен делиться на 11, т. е. $100x + y \mathrel{\vdots} 11$, или $x + y \mathrel{\vdots} 11$ (так как $99x \mathrel{\vdots} 11$).

Поскольку $0 \leqslant x \leqslant 9$ и $0 \leqslant y \leqslant 9$, получаем единственный вариант: $x + y = 11$. Отсюда $y = 11 - x$, и поэтому

$$100x + (11 - x) = 11t^2, \text{ или } 9x + 1 = t^2.$$

Перебрав все значения x от 1 до 9, найдем искомое число $N = 7744 = 88^2$.

Пример 7. В шахматном турнире участвовали два ученика VII класса и несколько учеников VIII класса. Каждый ученик играл с каждым из остальных участников турнира один раз. Два семиклассника набрали вместе 8 очков, а все восьмиклассники набрали по одинаковому числу очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире?

Решение. Пусть x — число восьмиклассников, y — число очков, набранных каждым из них. Число очков, набранных всеми участниками турнира, равно $xy + 8$. Это число равно числу сыгранных партий.

С другой стороны, так как участников было $x + 2$ и каждый участник сыграл с каждым из остальных по одному разу, то общее число сыгранных партий равно числу сочетаний из $x + 2$ элементов по два, т. е. $\frac{(x+2)(x+1)}{2}$.

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{(x+2)(x+1)}{2} = xy + 8,$$

или

$$x\,(x + 3 - 2y) = 14.$$

Так как x — делитель 14, то x может принимать значения, равные 1, 2, 7 и 14. Значения 1 и 2 не удовлетворяют условию задачи, так как в этом случае общее число участников не превышает 4 и два семиклассника не могли набрать вдвоем 8 очков. Значит, число восьмиклассников могло быть 7 или 14.

УПРАЖНЕНИЯ

34. Найдите целочисленные решения уравнений:

а) $35xy + 5x - 7y = 1$;
б) $28x + 27y + 21 = 36xy$;
в) $x^2 - 4xy + 5y^2 = 169$;
г) $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$;
д) $2x^2 - 11xy + 12y^2 = 17$;
е) $x + y = x^2 - xy + y^2$;
ж) $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$;
з) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$;
и) $x^4 - y^4 - 20x^2 + 28y^2 = 107$;
к) $x^4 - y^4 - 2x^2 + 6y^2 = 13$;
л) $x^2 + y^2 = z^2$, $x, y, z \in \mathbf{N}$;
м) $x^2 + 2y^2 = z^2$, $x, y, z \in \mathbf{N}$.

35. Докажите, что данные уравнения неразрешимы в целых числах:

а) $2x^2 - 1 = 5y$;
б) $x^2 - 3y^2 = 17$;
в) $2x^2 - 5y^2 = 7$;
г) $3x^2 - 4y^2 = 13$;
д) $3x^2 + 8 = y^2$;
е) $2x^2 - 4x - 5y^2 - 10y - 10 = 0$;
ж) $3x^2 = 16y^2 + 8y - 7$;
з) $x^2 + y^2 = 4^n$, $n \in \mathbf{N}$;
и*) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$;
к*) $x^3 - 5y^2 = 13$.

36. Решите в целых числах уравнения:

а) $3^x - 5 = 4y$;
б) $2^{\frac{x-y}{y}} - \frac{3}{2}y = 1$;
в*) $2^x + 1 = y^z$.

37. Решите в целых числах следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x + yz = 7; \end{cases}$
б) $\begin{cases} x^2 + y = 42, \\ x + y^2 = 42; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x! + y! = z!, \\ x + y = z, \end{cases}$
где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

38*. Покажите, применяя метод «бесконечного спуска», что уравнения

а) $6(x^2 + y^2) = z^2 + t^2$;   б) $x^4 + y^4 = z^2$

неразрешимы в натуральных числах..

39. Найдите двузначное число, которое равно сумме куба числа его десятков и квадрата числа его единиц.

40. Некоторое трехзначное число, записанное в пятеричной системе, в семеричной системе изображается теми же цифрами, но записанными в обратном порядке. Найдите такие числа.

41*. Найдите четырехзначное число, равное квадрату числа, выраженного его двумя последними цифрами.

42. Найдите четырехзначное число, последние три цифры которого составляют арифметическую прогрессию, причем, если читать это число справа налево, то получится число, которое на 360 меньше искомого.

43. Можно ли число 101 010 представить в виде разности квадратов двух целых чисел?

44. Найдите все натуральные числа, для которых выражение $22x + 5$ является квадратом натурального числа.

45. Докажите, что число $121x - 3$ ни при каком целом x нельзя представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.

46. В шахматном турнире участвовали ученики IX и X классов. Каждый ученик играл с каждым из остальных участников турнира один раз. Десятиклассников было в 10 раз больше, чем девятиклассников, и они набрали вместе в 4,5 раза больше очков, чем девятиклассники. Сколько учеников IX класса участвовало в турнире и сколько очков они набрали?

§ 3. Уравнения, содержащие переменную под знаком «антье»

Целой частью действительного числа x (или *функцией «антье»*) называется наибольшее целое число n, не превосходящее x.

Целая часть числа x обозначается символом $[x]$ или (реже) символом $E(x)$. Читается так: «целая часть x», или «антье x».

Примеры. $[2,3] = 2$, $[-2,3] = -3$,

$$\left[3 + 4\cos\frac{90\pi}{179}\right] = 2.$$

Из определения «антье x» следует, что

$$[x] \leqslant x < [x] + 1,$$

или

$$0 \leqslant x - [x] < 1,$$

т. е.

$$x = [x] + \alpha,$$

где $0 \leqslant \alpha < 1$.

Отметим простейшие свойства «антье x».

1°. *Для* $\forall x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}$

$$[x + n] = [x] + [n] = [x] + n.$$

2°. *Если* u, $v \in \mathbf{R}$ *и* $[u] = [v]$, *то*

$$-1 < u - v < 1.$$

3°. *Для* $\forall n \in \mathbf{N}$ *и* $x \in \mathbf{R}$

$[nx] \geqslant n[x]$ *и* $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$.

В данном параграфе рассмотрим решение уравнений, содержащих переменную под знаком «антье». Решение таких уравнений обычно сводится к решению неравенств или систем неравенств. Иногда удобно для наглядности использовать графики функций.

Покажем это на примерах.

Пример 1. Решим уравнение

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}.$$

Решение. Пусть $\frac{15x-7}{5}=t$, где $t \in \mathbf{Z}$.

Отсюда

$$x=\frac{5t+7}{15}.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$\left[\frac{10t+39}{40}\right]=t.$$

Из определения «антье» следует:

$$0 \leqslant \frac{10t+39}{40}-t<1.$$

Решая это двойное неравенство, находим, что

$$-\frac{1}{30} \leqslant t<\frac{13}{10}.$$

Так как $t \in \mathbf{Z}$, то последнему неравенству удовлетворяют $t_1=0$, $t_2=1$. Тогда соответственно $x_1=\frac{7}{15}$, $x_2=\frac{4}{5}$.

Пример 2. Решим уравнение

$$[x-1]=\left[\frac{x+2}{2}\right].$$

Решение. 1-й способ. Обозначим: $[x-1]=t$, $\left[\frac{x+2}{2}\right]=t$.

Тогда

$$t \leqslant x-1<t+1 \text{ и } t \leqslant \frac{x+2}{2}<t+1,$$

или

$$t+1 \leqslant x<t+2 \qquad (1)$$

и

$$2(t-1) \leqslant x<2t. \qquad (2)$$

Задача свелась к нахождению таких целых значений t, при которых существует общая часть двух указанных промежутков. Очевидно, решение отсутствует, если:

1) промежуток (2) находится «правее» промежутка (1), т. е. при $2(t-1) \geqslant t+2$, или $t \geqslant 4$;

2) промежуток (2) лежит «левее» промежутка (1), т. е. при $2t \leqslant t+1$, или $t \leqslant 1$.

Следовательно, решение существует при $1 < t < 4$, а так как $t \in \mathbf{Z}$, то $t_1 = 2$, $t_2 = 3$.

При $t = 2$ из неравенств (1) и (2) получаем:

$$3 \leqslant x < 4, \; 2 \leqslant x < 4,$$

откуда $3 \leqslant x < 4$.

При $t = 3$ аналогично получаем: $4 \leqslant x < 5$. Следовательно, решениями данного уравнения будут все значения $x \in [3; 5[$.

2-й способ. Согласно свойству 2^0 имеем:

$$-1 < x - 1 - \frac{x+2}{2} < 1, \tag{3}$$

откуда

$$2 < x < 6. \tag{4}$$

Это условие является необходимым, но недостаточным. Например, при $x = 2{,}5$ неравенство (3) выполняется, а данное уравнение нет.

Построим два графика функций $y = x - 1$ и $y = \frac{x+2}{2}$ для значений x, удовлетворяющих неравенствам (4).

Мы видим (рис. 2), что лишь во второй и третьей полосах имеются участки (заштрихованные фигуры), где целые значения y совпадают.

Подставив $y = 2$ в уравнение $y = x - 1$, получим нижнюю границу $x = 3$, удовлетворяющую данному уравнению. Подставив же в уравнение $y = x - 1$ значение $y = 4$, найдем верхнюю границу $x = 5$. Проверкой убеждаемся, что значение $x = 5$ данному уравнению не удовлетворяет. Поэтому решением уравнения будут все действительные числа x, удовлетворяющие неравенству $3 \leqslant x < 5$.

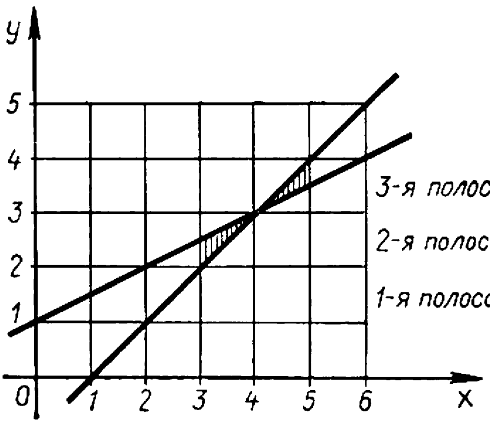

Рис. 2

3-й способ. Построим графики функций $y = [x - 1]$ и $y = \left[\frac{x+2}{2}\right]$. Из рисунка 3 замечаем, что общие точки графика имеются в промежутке $[3; 5[$.

Пример 3. Решим уравнение

$$[-x^2 + 3x] = x^2 + 0{,}5.$$

Решение. По определению функции «антье» данное уравнение равносильно двойному неравенству

$$x^2+\frac{1}{2}\leqslant -x^2+3x<x^2+\frac{3}{2}.$$

Решая эту систему неравенств, получим числовой промежуток

$$\frac{3-\sqrt{5}}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3+\sqrt{5}}{4}.$$

Рассмотрим в этом промежутке параболу $y=x^2+\frac{1}{2}$ (рис. 4). Пределы, в которых изменяются значения функции, определяются ординатами точек пересечения параболы с прямыми

$$x=\frac{3-\sqrt{5}}{4} \text{ и } x=\frac{3+\sqrt{5}}{4}:$$

$$\frac{11-3\sqrt{5}}{8}\leqslant y\leqslant\frac{11+3\sqrt{5}}{8}.$$

Замечаем, что в пределах, в которых заключено y, есть два целых числа: $y_1=1$ и $y_2=2$. Им соответствуют значения: $x_1=\sqrt{0,5}$ и $x_2=\sqrt{1,5}$. Это и есть решения данного уравнения.

Пример 4. Решим уравнение

$$x^3-[x]=3.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение

$$x^3=[x]+3.$$

На основании свойства 1^0 функции «антье» получаем:

$$x^3=[x+3].$$

Отсюда следует, что $x^3\in\mathbf{Z}$.

Строим графики функции $y=x^3$ и $y=[x+3]$. Графическая прикидка (рис. 5) показывает, что единственный корень находится между числами 1 и 2. Кроме того, $x^3\in\mathbf{Z}$ и $x^3=[x+3]$, поэтому x должен быть корнем кубичным из некоторо-

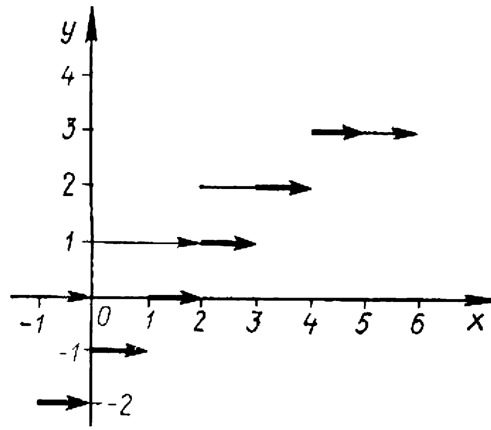

Рис. 3

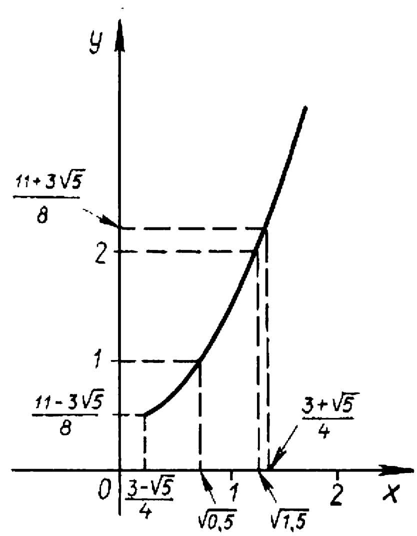

Рис. 4

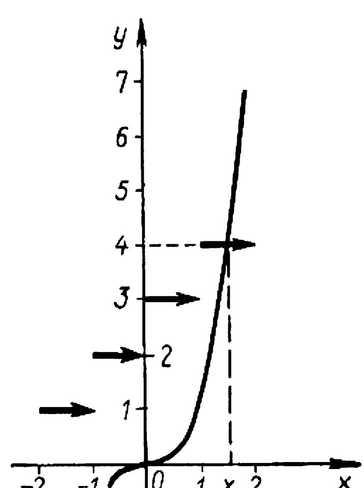

Рис. 5

го целого числа b, не превосходящего 8. Испытывая $b = 1, 2, 3, 4$, находим, что $b = 4$ и

$$x = \sqrt[3]{4} \in [1; 2]$$

удовлетворяет данному уравнению.

УПРАЖНЕНИЯ

47. Решите уравнения:

а) $[3{,}5x] = 20$, где $x \in \mathbf{N}$;

б) $[x^2] = 2$;

в) $[3x^2 - x] = x + 1$;

г) $[x] = \frac{3}{4}x$;

д) $[x] - 2\left[\frac{x}{2}\right] = 1$;

е) $x^3 - [x] = -3$;

ж) $[x] = x^3 - 21$;

з) $\left[\frac{8x+19}{7}\right] = \frac{16(x+1)}{11}$;

и) $\left[\frac{2x-1}{3}\right] = \left[\frac{x+1}{2}\right]$;

к) $\left[\frac{2x-1}{3}\right] = \left[\frac{2x+5}{5}\right]$;

л*) $\left[\frac{x^2-2}{3}\right] = [x]$;

м) $\begin{cases} [x + y - 8] = 6 - x, \\ [x - 5] + [y - 4] = 15 - x - y; \end{cases}$

н) $\sqrt{[-7x^2 + 3x + 4]} = [2 - \sin x]$.

48*. Решите неравенство

$$\left| x - \left[x + \frac{1}{2} \right] \right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

49*. Определите число целых неотрицательных решений уравнения

$$\left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{x}{a+k}\right],$$

где $a, k \in \mathbf{N}$.

50. Покажите, что решением уравнения

$$[x] + \left[x + \frac{1}{100}\right] + \left[x + \frac{2}{100}\right] + \ldots + \left[x + \frac{99}{100}\right] = [100x]$$

является любое $x \in \mathbf{R}$.

51*. Найдите число всех натуральных чисел, оканчивающихся хотя бы двумя одинаковыми, не равными нулю цифрами и не превосходящими данное число N.

52. Путешественник был в пути целое число дней, проезжая каждый день столько километров, сколько дней он находился в пути. Если бы он проезжал ежедневно по 20 км и через каждые 40 км останавливался на один день, то время его путешествия увеличилось бы на 37 дней. Сколько дней путешественник был в пути?

§ 4. Функциональные уравнения

Функциональным уравнением называется соотношение, выражающее определенное свойство, которым обладает некоторый класс функций (некоторая функция).

Простейшими примерами функциональных уравнений могут служить: $f(x) = f(-x)$ — уравнение четности, $f(x + T) = f(x)$ — уравнение периодичности, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ и др.

Функция $f(x)$ называется решением данного функционального уравнения, если она удовлетворяет ему при всех значениях аргумента в области ее определения.

Например, функции

$$f(x) = ax^2,\ f(x) = \sin 2\pi x,\ f(x) = ax,$$

где $a \in \mathbf{R}$, являются частными решениями приведенных соответственно выше уравнений, в чем легко убедиться подстановкой.

Решить функциональное уравнение — значит установить, имеет ли оно решения, и найти их, если они имеются.

Процесс отыскания решения определяется как поставленной целью, так и ограничительными условиями, выражающими те или иные свойства, которыми должна обладать искомая функция (монотонность, непрерывность, дифференцируемость и т. д.). Так, например, уравнение

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

в предположении непрерывности искомой функции имеет единственное решение $f(x) = ax$, но если опустить это условие, то можно указать разрывную функцию, удовлетворяющую этому уравнению.

Укажем некоторые методы решения функциональных уравнений.

1. Метод Коши. Этот метод состоит в том, что решение функционального уравнения отыскивается постепенно для всех натуральных, целых, рациональных, а затем и действительных значений аргумента. Ясно, что данный метод предполагает выполнение условия непрерывности функций.

Пример 1. Решим уравнение

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y). \tag{1}$$

Решение. Положив $y = x, 2x, \ldots$, получим (по индукции):

$$\begin{aligned} f(2x) &= f^2(x), \\ f(3x) &= f^3(x), \\ &\cdots\cdots \\ f(nx) &= f^n(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Приняв в этих равенствах $x = 1$, получим:

$$f(n) = f^n(1).$$

Считая $f(1) = C_1$, имеем для $x \in \mathbf{N}$: $f(x) = C_1^x$.

Положив в равенстве (2) $x = \frac{m}{n}$, получим:

$$f(m) = f^n\left(\frac{m}{n}\right) = C_2^m,$$

откуда

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = C_2^{\frac{m}{n}}.$$

Таким образом, для $x \in \mathbf{Q}$ решением данного уравнения будет $f(x) = C^x$. Предполагая, что функция $f(x)$ непрерывна, получим: $f(x) = C^x$ для $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$.

Положив в равенстве (1) $x = 0$, будем иметь:

$$f(y) = f(0) \cdot f(y),$$

откуда $f(y) = 0$, или $f(0) = 1 = C^0$.

Полагая в равенстве (1) $y = -x$ найдем:

$$f(0) = f(-x)\,f(x),\quad 1 = f(-x)\,f(x),$$

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{C^x} = C^{-x}.$$

Итак, для любого действительного x решением уравнения будет функция $f(x) = C^x$.

2. Метод подстановки. Этот метод заключается в том, что, применяя вместо x (или y) различные подстановки и комбинируя полученные уравнения с исходным, получаем (обычно путем исключения) алгебраическое уравнение относительно искомой функции.

Пример 2. Решим уравнение

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x.$$

Решение. Пусть $\frac{x-2}{x+1} = z$, тогда $x = \frac{z+2}{1-z}$, $(z \neq 1,\ z \neq 0)$ и

$$f\left(\frac{1}{z}\right) + 2f(z) = \frac{z+2}{1-z}. \tag{3}$$

Заменяя z на $\frac{1}{z}$, получим:

$$f(z) + 2f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1+2z}{z-1}. \tag{4}$$

Из равенств (3) и (4) найдем $f(z)$: $f(z) = \frac{4z+5}{3(1-z)}$

и соответственно $f(x) = \frac{4x+5}{3(1-x)}$.

Это и есть решение данного уравнения.

Пример 3. Решим уравнение

$$2f(x+y) + f(x-y) = f(x)\,(2e^y + e^{-y}).$$

Р е ш е н и е. Выполняя следующие подстановки:

$$x = 0,\ y = t;\ x = t,\ y = 2t;\ x = t,\ y = -2t,$$

получим уравнения:

$$\begin{aligned} 2f(t) + f(-t) &= a\,(2e^{t} + e^{-t}), \\ 2f(3t) + f(-t) &= f(t)\,(2e^{2t} + e^{-2t}), \\ 2f(-t) + f(3t) &= f(t)\,(2e^{-2t} + e^{2t}), \end{aligned}$$

где $a = f(0)$.

Исключим из этих уравнений $f(-t)$ и $f(3t)$. Для этого вычтем третье уравнение, предварительно умноженное на 2, из суммы первого уравнения, умноженного на 3, и второго уравнения.

Получим общее решение в неявном виде:

$$6f(t) = 3a\,(2e^{t} + e^{-t}) - 3f(t) \cdot e^{-2t},$$

откуда

$$f(t) = a \cdot \frac{2e^{t} + e^{-t}}{2 + e^{-2t}} = a \cdot e^{t}.$$

Эта функция действительно удовлетворяет исходному уравнению, в чем легко убедиться проверкой:

$$2ae^{x+y} + ae^{x-y} = a \cdot e^{x}\,(2e^{y} + e^{-y}).$$

УПРАЖНЕНИЯ

53. Покажите, что следующим функциональным уравнениям

а) $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
б) $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$;
в) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$;
г) $f(xy) = f(x) + f(y)$;
д) $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \cdot f(y)$;
е) $f(x + y) = \dfrac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)\,f(y)}$

удовлетворяют соответственно функции

$$ax,\ x^{a},\ a^{x},\ \log_a x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x.$$

Рассмотрите некоторые свойства этих функций, исходя из соответствующего функционального уравнения (например, четность, нечетность и др.).

54. Решите следующие функциональные уравнения:

а) $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = 2f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$;

б) $f(x) + f\left(\dfrac{4}{2-x}\right) = x$;

в) $af(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = ax$;

г) $f(n)=f(n-1)+a^n$, $f(1)=1$, $n\in\mathbf{N}$, $a\in\mathbf{R}$;

д) $n^{f(n)-1}=(n-1)^{f(n-1)}$, $n\in\mathbf{N}$;

е) $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot\cos y$.

55. Докажите, что если при $x\in\mathbf{R}$ и постоянном $m\in\mathbf{R}$ справедливо равенство $f(x+m)=\dfrac{1+f(m)}{1-f(m)}$, то $f(x)$ — периодическая функция. Найдите пример такой функции.

56*. Решите следующие функциональные уравнения:

а) $f^2(x)=f(2x)$;

б) $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$;

в) $f(x+y)+2f(x-y)=3f(x)-y$;

г) $f(x+y)=f(x)+y$;

д) $f(x+y)-2f(x-y)+f(x)-2f(y)=y-2$.

§ 5. «Нестандартные» уравнения и системы уравнений

Общей теории решения уравнений и систем уравнений рассматриваемого типа не существует. В процессе решения их используют такие свойства входящих в уравнение функций, как ограниченность (сверху или снизу), монотонность, четность или нечетность и др. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найдем пары действительных чисел x и y, удовлетворяющих уравнению

$$x^2+4x\cos xy+4=0.$$

Решение. Можно предложить несколько способов решения данного уравнения.

1-й способ. Поскольку уравнение является квадратным (если не считать x под знаком косинуса), то выразим x через тригонометрические функции угла xy:

$$x=-2\cos xy\pm\sqrt{4\cos^2 xy-4}=-2\cos xy\pm2\sqrt{-\sin^2 xy}.$$

Так как по условию x и y — действительные числа, то $-\sin^2 xy\geqslant 0$. Это неравенство выполнимо лишь при $\sin xy=0$, т. е. при $xy=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Теперь имеем:

$$x=-2\cos xy=-2\cos k\pi.$$

Если k четное, то $\cos k\pi=1$ и $x=-2$, а потому $y=n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$; если же k нечетное, то $\cos k\pi=-1$ и $x=2$, а потому $y=\dfrac{\pi}{2}(2m+1)$, где $m\in\mathbf{Z}$.

2-й способ. Преобразуем уравнение так, чтобы в левой части получилась сумма неотрицательных чисел, например путем прибавления и соответственно вычитания по $4\cos^2 xy$. Получаем:

$$(x+2\cos xy)^2+4(1-\cos^2 xy)=0,$$

или

$$(x+2\cos xy)^2+4\sin^2 xy=0.$$

Поскольку сумма квадратов действительных чисел равна нулю тогда, когда равно нулю каждое слагаемое, приходим к системе:

$$\begin{cases} x+2\cos xy=0, \\ \sin xy=0, \end{cases}$$

решив которую, найдем те же значения x и y.

Пример 2. Решим уравнение

$$\frac{|\operatorname{ctg} xy|}{\cos^2 xy}-2=\log_{\frac{1}{3}}(9y^2-18y+10).$$

Решение. Воспользоваться способами, рассмотренными при решении примера 1, здесь нельзя. Попытаемся использовать свойство ограниченности функций.

С одной стороны,

$$\frac{|\operatorname{ctg} xy|}{\cos^2 xy}=\left|\frac{\operatorname{ctg} xy}{\cos^2 xy}\right|=\left|\frac{2}{\sin 2xy}\right|\geqslant 2.$$

и соответственно $\frac{|\operatorname{ctg} xy|}{\cos^2 xy}-2\geqslant 0.$

С другой стороны,

$$\log_{\frac{1}{3}}(9y^2-18y+10)=\log_{\frac{1}{3}}(9(y-1)^2+1)\leqslant 0,$$

так как $9(y-1)^2+1\geqslant 1$ при любых значениях y.

Поскольку левая часть уравнения неотрицательна при $x, y\in \mathbf{R}$, а правая — не больше нуля, то, для того чтобы уравнение имело решение, должна иметь решение следующая система:

$$\begin{cases} \left|\frac{2}{\sin 2xy}\right|=2, \\ \log_{\frac{1}{3}}(9y^2-18y+10)=0, \end{cases}$$

соответственно

$$\begin{cases} |\sin 2xy|=1, \\ 9y^2-18y+10=1, \end{cases}$$

решая которую получаем: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ y=1,\ k\in \boldsymbol{Z}.$

Пример 3. Решим неравенство

$$2^y-2\cos x+\sqrt{y-x^2-1}\leqslant 0.$$

Решение. Поскольку $y-x^2-1\geqslant 0$, то $y\geqslant x^2+1$ и соответственно $2^y\geqslant 2$.

Так как $\cos x\leqslant 1$, то $-2\cos x\geqslant -2$. Складывая теперь неравенства одного смысла:

$$2^y\geqslant 2,\quad -2\cos x\geqslant -2,\quad \sqrt{y-x^2-1}\geqslant 0,$$

получаем:

$$2^y - 2\cos x + \sqrt{y - x^2 - 1} \geqslant 0.$$

Сравнивая это неравенство с исходным, приходим к выводу, что условию задачи должны удовлетворять только те значения x и y, при которых $2^y - 2\cos x + \sqrt{y - x^2 - 1} = 0$, что возможно лишь при $2^y = 2$, $\cos x = 1$ и $\sqrt{y - x^2 - 1} = 0$.

Решая систему:

$$\begin{cases} 2^y = 2, \\ \cos x = 1, \\ \sqrt{y - x^2 - 1} = 0, \end{cases}$$

получаем: $y = 1$, $x = 0$.

Пример 4. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

Решение. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \geqslant 2$, так как $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ при $a > 0$. Поскольку правая часть первого уравнения $2\sin^2 y \leqslant 2$, то первое уравнение должно выполняться при тех значениях x и y, которые удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2, \\ 2\sin^2 y = 2. \end{cases}$$

Из второго уравнения исходной системы получаем: $\cos^2 z = 0$, откуда $z = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$.

Решая полученную систему, находим:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad y = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad k, n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 5. Найдем все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a + 1)by^2 = a^2, \\ (a - 1)x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b, ($a, b, x, y \in \mathbf{R}$).

Решение. Предположим, что существует некоторое значение a, при котором система имеет хотя бы одно решение, например для $b = 0$.

В этом случае система примет вид:

$$\begin{cases} 1 = a^2, \\ (a - 1)x^3 + y^3 = 1. \end{cases}$$

Ясно, что эта система совместна лишь при $a = 1$ или при $a = -1$. Следовательно, если $b = 0$, то при этих значениях a исходная система совместна. Докажем теперь, что исходная система будет совместна для любого значения b.

Пусть $a = 1$. Тогда исходная система примет вид:

$$\begin{cases} 2^{bx} + 2by^2 = 1, \\ y^3 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим: $y = 1$ (по условию $y \in \mathbf{R}$). Подставив $y = 1$ в первое уравнение, получим:

$$2^{bx} = 1 - 2b.$$

Легко заметить, что при $b \geqslant \frac{1}{2}$ это уравнение не имеет решений. Значит, при $a = 1$ данная система имеет решения, но не для любого значения b, т. е. значение $a = 1$ не удовлетворяет условию задачи.

Проверим теперь: $a = -1$. Тогда исходная система примет вид:

$$\begin{cases} 2^{bx} = 1, \\ -2x^3 + y^3 = 1. \end{cases}$$

Совершенно очевидно, что первое уравнение имеет решение $x = 0$ при любом b. Тогда $y = 1$. Значит, условию задачи удовлетворяет лишь $a = -1$.

УПРАЖНЕНИЯ

57. Докажите, что уравнение

$$x^2 - x \sin xy + 1 = 0$$

не имеет решений.

58. Найдите все пары действительных значений x и y, которые удовлетворяют уравнениям:

а) $\sin 2x + \cos(x + y) = 2$;

б) $4^{\sin x} - 2^{1+\sin x}\cos xy + 2^{|y|} = 0$;

в) $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x(\sin x + \cos y) + 2 = 0$;

г) $\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 y}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin xy$;

д) $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x + y)$.

59. Решите неравенства:

а) $\cos x \geqslant y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1}$;

б) $y \geqslant |\sec x| + \sqrt{1 - y - x^2}$;

в) $x - |y| \geqslant 1 + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

60. Найдите общий вид решения системы:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(y - z), \\ \operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(z - x). \end{cases}$$

61. Найдите действительные решения систем:

а) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 5 = 4z, \\ x - y \geqslant z; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2+20=z, \\ 8x+4y \geqslant z. \end{cases}$

62. Найдите действительные решения системы:

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2xy-z^2=4. \end{cases}$$

63. Докажите, что если три числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a}, \end{cases}$$

то хотя бы одно из этих чисел равно a.

64. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2+a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет только одно решение.

65. Найдите все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x^y-1}{x^y+1}\right|=a, \\ x^2+y^2=b \end{cases}$$

имеет только одно решение (a, b, x, $y \in \mathbf{R}$, $x>0$, $x \neq 1$).

66. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (x^2+1)^a+(b^2+1)^y=2, \\ a+bxy+x^2y=1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого b (a, b, x, $y \in \mathbf{R}$).

67. Определите, при каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} ax^2+a-1=y-|\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное действительное решение.

68. Дана система:

$$\begin{cases} x^y=a,\ x>0, \\ \operatorname{arctg} x=\dfrac{\pi}{4}+y. \end{cases}$$

При каких значениях a система имеет единственное решение?

69. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^3-ay^3=\dfrac{1}{2}(a+1)^2, \\ x^3+ax^2y+xy^2=1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение и любое ее решение удовлетворяет уравнению $x+y=0$ (a, x, $y \in \mathbf{R}$).

70. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \sin x = a, \\ \dfrac{y}{x} + \sin y = a. \end{cases}$$

При каких значениях a система имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям: $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$?

Глава II

СРЕДНЕЕ СТЕПЕННОЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Выражение вида

$$C_\alpha(a) = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{1}$$

называется *средним степенным* порядка α положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

В частности, при $\alpha = -1$ получаем *среднее гармоническое*

$$C_{-1}(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}};$$

при $\alpha = 1$ получаем *среднее арифметическое*

$$C_1(a) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n};$$

при $\alpha = 2$ получаем *среднее квадратичное*

$$C_2(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Отметим некоторые свойства среднего степенного:

1°. *Имеет место следующее равенство:*

$$\lim_{\alpha \to 0} C_\alpha(a) = G, \tag{2}$$

где $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ — *среднее геометрическое*. Поэтому примем

$$C_0(a) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

2°. *Для любых действительных* α *и* β, *таких, что* $\alpha \leqslant \beta$, *имеет место неравенство* (*свойство монотонности*):

$$C_\alpha(a) \leqslant C_\beta(a). \tag{3}$$

3°. *Пусть* $\min a$ — *наименьшее среди чисел* $a_1, a_2, \ldots a_n$, $\max a$ — *наибольшее среди этих же чисел. Тогда*

$$\lim_{\alpha \to -\infty} C_\alpha(a) = \min a, \quad \lim_{\alpha \to +\infty} C_\alpha(a) = \max a.$$

Отсюда вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\min a \leqslant \dots \leqslant C_{-2} \leqslant C_{-1} \leqslant C_0 \leqslant C_1 \leqslant C_2 \leqslant \dots \leqslant \max a.$$

Равенство наступает лишь при $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

§ 1. Доказательство неравенств

Пример 1. Докажем следующие соотношения:

а) $\ln C_0(a) = C_1(\ln a)$;

б) $\left(C_\alpha\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right)^\alpha = C_1(a)$;

в) $C_1(ab) \leqslant C_2(a)\, C_2(b)$;

г) $C_1(a)\ C_1(b) \geqslant C_{\frac{1}{2}}(ab)$.

Решение. а) $\ln C_0(a) = \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} =$

$$= \frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n) = C_1(\ln a).$$

б) Запишем среднее степенное для $a^{\frac{1}{\alpha}}$:

$$C_\alpha\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right) = \left(\frac{\left(a_1^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha + \left(a_2^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha + \dots + \left(a_n^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(C_1(a)\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Возведя это равенство в степень α, получим:

$$\left(C_\alpha\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right)^\alpha = C_1(a).$$

в) Попробуем доказать, что $\frac{C_1(ab)}{C_2(a)\,C_2(b)} \leqslant 1$. Имеем:

$$\frac{C_1(ab)}{C_2(a)\ C_2(b)} = \frac{a_1b_1 + \dots + a_nb_n}{nC_2(a)\ C_2(b)} =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{C_2(a)}\,\frac{b_1}{C_2(b)} + \dots + \frac{a_n}{C_2(a)}\,\frac{b_n}{C_2(b)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{\left(\frac{a_1}{C_2(a)}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{C_2(b)}\right)^2}{2} + \dots + \frac{\left(\frac{a_n}{C_2(a)}\right)^2 + \left(\frac{b_n}{C_2(b)}\right)^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n\,(C_2(a))^2} + \frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}{n\,(C_2(b))^2}\right) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1.$$

Здесь было использовано неравенство вида

$$xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

которое, как известно, переходит в равенство при $x = y$, в нашем случае при $\frac{a_1}{C_2(a)} = \frac{b_1}{C_2(b)}, \ldots, \frac{a_n}{C_2(a)} = \frac{b_n}{C_2(b)}$, т. е. при

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Замечание. Неравенство в) равносильно неравенству Буняковского — Коши:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \times$$
$$\times \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}.$$

г) Используя неравенства б) и в), получаем:

$$C_1(a)\,C_1(b) = (C_2(\sqrt{a}))^2\,(C_2(\sqrt{b}))^2 \geqslant (C_1(\sqrt{ab}))^2 = C_{\frac{1}{2}}(ab).$$

Пример 2. Докажем неравенство

$$\sqrt[k]{x_1} + \sqrt[k]{x_2} + \ldots + \sqrt[k]{x_k} \leqslant n\sqrt[k]{\frac{a}{n}},$$

если $x_i > 0$, $k \in \mathbf{N}$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$.

Доказательство. При $k \geqslant 1$ имеет место неравенство (свойство монотонности): $C_{\frac{1}{k}} \leqslant C_1$,

т. е.
$$\left(\frac{x_1^{\frac{1}{k}} + x_2^{\frac{1}{k}} + \ldots + x_n^{\frac{1}{k}}}{n}\right)^k \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\sqrt[k]{x_1} + \sqrt[k]{x_2} + \ldots + \sqrt[k]{x_n}}{n}\right)^k \leqslant \frac{a}{n}$$

и

$\sqrt[k]{x_1} + \sqrt[k]{x_2} + \ldots + \sqrt[k]{x_n} \leqslant n\sqrt[k]{\frac{a}{n}}$, что и требовалось доказать.

Пример 3. Докажем, что если $n > m > 0$, $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$(a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m)(a_1^{n-m} + a_2^{n-m} + \ldots + a_n^{n-m}) \geqslant n^2 a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Решение. Используя очевидные неравенства:

$$C_m \geqslant C_0,\ C_{n-m} \geqslant C_0,$$

получаем:

$$a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m \geqslant n\sqrt[n]{(a_1a_2\ldots a_n)^m},$$

$$a_1^{n-m} + a_2^{n-m} + \ldots + a_n^{n-m} \geqslant n\sqrt[n]{(a_1a_2\ldots a_n)^{n-m}}.$$

После перемножения двух последних неравенств, получаем необходимый результат.

Пример 4. Докажем неравенство

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)\left(\frac{b_1}{x_1} + \frac{b_2}{x_2} + \dots + \frac{b_n}{x_n}\right) \geqslant (\sqrt{a_1b_1} + \dots + \sqrt{a_nb_n})^n,$$

где все a_i, b_i, x_i — действительные положительные числа.

Решение. В неравенстве Буняковского — Коши (пример 1, в) заменим a_i на $\sqrt{a_ix_i}$, b_i на $\sqrt{\frac{b_i}{x_i}}$. Тогда произведения a_ib_i заменятся на $\sqrt{a_ib_i}$:

$$C_2(\sqrt{ax})\ C_2\left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right) \geqslant C_1\left(\sqrt{ax}\ \ \sqrt{\frac{b}{x}}\right),$$

откуда будет следовать исходное неравенство.

Пример 5. Докажем, что если A, B, C — углы треугольника, то

$$\sin^\alpha \frac{\widehat{A}}{2} + \sin^\alpha \frac{\widehat{B}}{2} + \sin^\alpha \frac{\widehat{C}}{2} \geqslant 3\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \quad (1)$$

при $\alpha \geqslant 2$.

Решение. Сначала запишем (в силу свойства монотонности среднего степенного) неравенство

$$\left(\frac{\sin^\alpha \frac{\widehat{A}}{2} + \sin^\alpha \frac{\widehat{B}}{2} + \sin^\alpha \frac{\widehat{C}}{2}}{3}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \left(\frac{\sin^2 \frac{\widehat{A}}{2} + \sin^2 \frac{\widehat{B}}{2} + \sin^2 \frac{\widehat{C}}{2}}{3}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Так как

$$\sin^2 \frac{\widehat{A}}{2} + \sin^2 \frac{\widehat{B}}{2} + \sin^2 \frac{\widehat{C}}{2} \geqslant \frac{3}{4} \text{ (докажите!)},$$

то неравенство (2) примет вид:

$$\left(\frac{\sin^\alpha \frac{\widehat{A}}{2} + \sin^\alpha \frac{\widehat{B}}{2} + \sin^\alpha \frac{\widehat{C}}{2}}{3}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

откуда легко получить неравенство (1).

Пример 6. Докажем неравенство

$$h_1^\alpha + h_2^\alpha + h_3^\alpha \geqslant 3\,(3r)^\alpha,$$

где $\alpha \geqslant 1$, $\alpha \in \mathbf{R}$, h_1, h_2, h_3 — длины высот треугольника, r — длина радиуса вписанной окружности.

Решение. Замечаем, что

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} = 2S\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

где S — площадь треугольника, a, b, c — длины его сторон.

Но

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9,$$

так как $C_1 \geqslant C_0$, $C_0 \geqslant C_{-1}$. Поэтому

$$h_1+h_2+h_3 \geqslant 2S\frac{9}{a+b+c} = \frac{S\cdot 9}{p} = 9r$$

(напомним: $S = pr$). Теперь можем применить свойство $C_\alpha \geqslant C_1$ при $\alpha \geqslant 1$:

$$\left(\frac{h_1^\alpha+h_2^\alpha+h_3^\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \frac{h_1+h_2+h_3}{3} \geqslant 3\,r,$$

откуда

$$h_1^\alpha+h_2^\alpha+h_3^\alpha \geqslant 3\,(3r)^\alpha$$

при $\alpha \geqslant 1$, что и требовалось доказать.

Пример 7. В треугольник вписана окружность радиуса r и построены три окружности радиусов r_1, r_2 и r_3, касающиеся двух сторон треугольника и вписанной окружности. Докажем, что выполняется следующее неравенство:

$$(r_1r_2)^m + (r_2r_3)^m + (r_3r_1)^m \geqslant 3\left(\frac{r}{3}\right)^{2m} \qquad (1)$$

при $m \geqslant \frac{1}{2}$.

Решение. При решении задач подобного типа сначала надо решить чисто геометрическую задачу, а затем уже применить свойства среднего степенного.

Выразим все радиусы r_1, r_2, r_3 через r и величины углов треугольника ABC.

Очевидно, что (рис. 6)

$$\frac{r-r_1}{r+r_1} = \sin\frac{\widehat{A}}{2}.$$

Отсюда

$$r_1 = r\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi-\widehat{A}}{4}.$$

Аналогично

$$r_2 = r\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi-\widehat{B}}{4}, \quad r_3 = r\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi-\widehat{C}}{4}.$$

Теперь будем попарно комбинировать произведения радиусов, стремясь найти связь между компонентами в форме

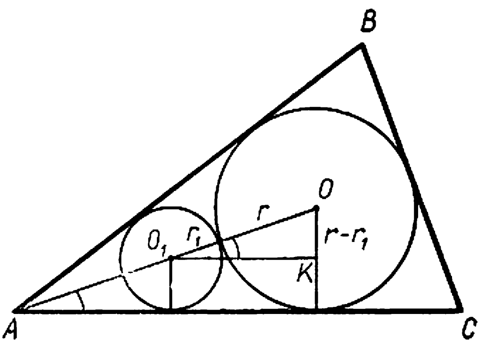

Рис. 6

$r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1$. Такая попытка приводит к вычислению суммы произведений квадратов тангенсов, найти которую трудно. Попытаемся вычислить сумму квадратных корней из каждого попарного произведения радиусов. Имеем:

$$\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1}=r\left(\operatorname{tg}\frac{\pi-\widehat{A}}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi-\widehat{B}}{4}+\right.$$
$$\left.+\operatorname{tg}\frac{\pi-\widehat{B}}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi-\widehat{C}}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi-\widehat{C}}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi-\widehat{A}}{4}\right). \qquad (2)$$

Замечаем, что

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi-\widehat{A}}{4}+\frac{\pi-\widehat{B}}{4}+\frac{\pi-\widehat{C}}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

При такой связи между величинами углов треугольника имеет место тождество

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1. \qquad (3)$$

В самом деле, исходя из равенства

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma,$$

получаем:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{ctg}\gamma=\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma},$$

откуда легко получается тождество (3).

Итак, выражение в скобках правой части равенства (2) равно 1, поэтому

$$\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1}=r.$$

Теперь, применяя свойство монотонности среднего степенного $C_m\geqslant C_{\frac{1}{2}}$ при $m\geqslant\frac{1}{2}$, получаем:

$$\left(\frac{(r_1r_2)^m+(r_2r_3)^m+(r_3r_1)^m}{3}\right)^{\frac{1}{m}}\geqslant\left(\frac{\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1}}{3}\right)^2,$$

откуда следует равенство (1).

УПРАЖНЕНИЯ

71. Докажите следующие свойства среднего степенного:

1^0. $C_1(a+b)=C_1(a)+C_1(b)$;

2^0. $\frac{1}{C_0(a)}=C_0\left(\frac{1}{a}\right)$;

3°. $\frac{1}{C_{-1}(a)} = C_1\left(\frac{1}{a}\right)$;

4°. $C_0(ab) = C_0(a)\,C_0(b)$;

5°. $C_\alpha(ab) \geqslant C_\alpha(a)\,C_\alpha(b)$, $(\alpha \geqslant 0)$,
$C_\alpha(ab) \leqslant C_\alpha(a)\,C_\alpha(b)$, $(\alpha < 0)$;

6°. $C_\alpha(a+b) \leqslant C_\alpha(a) + C_\alpha(b)$, $(\alpha \geqslant 1)$;
$C_\alpha(a+b) \geqslant C_\alpha(a) + C_\alpha(b)$, $(\alpha \leqslant 1)$.

72. Докажите неравенства:

а) $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n$;

б) $(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$.

73. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ образуют некоторую перестановку положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. При какой перестановке сумма $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}$ принимает наименьшее значение?

74. Докажите, что если $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$ и $x_i > 0$, то

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \geqslant \frac{n^2}{S}.$$

75. Докажите неравенства:

а) $\log_{a_1} \sqrt[n]{x} + \log_{a_2} \sqrt[n]{x} + \ldots + \log_{a_n} \sqrt[n]{x} \geqslant \log_{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} x$,

где $a_i > 1$, $x > 1$, $n \in \mathbf{N}$;

б) $\frac{1}{\log^k_{a_2 a_3 \ldots a_n} a_1} + \frac{1}{\log^k_{a_1 a_3 \ldots a_n} a_2} + \ldots + \frac{1}{\log^k_{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} a_n} \geqslant n(n-1)^k$.

76. Докажите выполнимость неравенства

$$\frac{a_1^{\alpha+\beta} + \ldots + a_n^{\alpha+\beta}}{a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha} \geqslant \frac{a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{a_1^{\alpha-\beta} + \ldots + a_n^{\alpha-\beta}} \quad \text{при } \alpha > \beta.$$

77. Исходя из неравенства Буняковского — Коши, докажите неравенства:

а) $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{c_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i c_i}{b_i} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$;

б) $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i \ln a_i} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln a_i}{b}} \geqslant n \ln C_0(a)$.

78. Докажите, что сопротивление n последовательно соединенных проводников превышает сопротивление тех же проводников, соединенных параллельно, не менее чем в n^2 раз.

79. Тело проходит путь AB равными частями, причем скорость его по крайней мере на двух участках различна. Обратный путь оно прошло равномерно со скоростью, равной среднему арифметическому скоростей, которыми обладало тело на отдельных участках пути AB. На какой путь ушло больше времени: на путь AB или на путь BA?

80. Не пользуясь таблицами, докажите неравенства:

а) $\cos 10^\circ + \cos 50^\circ + \cos 70^\circ > \frac{3}{7}\sqrt[6]{3}$;

б) $\sqrt{\operatorname{tg}^3 10^\circ} + \sqrt{\operatorname{tg}^3 50^\circ} + \sqrt{\operatorname{tg}^3 70^\circ} < 3\sqrt[4]{27}$.

81*. Докажите следующие неравенства:

а) $x^\alpha y^\beta \leqslant \alpha x + \beta y$, если $\alpha + \beta = 1, \alpha > 0, \beta > 0, x > 0, y > 0$.

б) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^\alpha y_i^\alpha \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^\alpha \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)^\beta$,

если $\alpha + \beta = 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x_i > 0$, $y_i > 0$.

82. Докажите неравенство

$$[nx]^n \geqslant n^n [x]\left[x + \frac{1}{n}\right] \dots \left[x + \frac{n-1}{n}\right],$$

где символ $[a]$ — функция «антье».

83. Докажите неравенство

$$n\sqrt[n]{\varphi(a_1 a_2 \dots a_n)} \leqslant \varphi(a_1) + \varphi(a_2) + \dots + \varphi(a_n)$$

при $(a_i, a_j) = 1$, $i \neq j$, где $\varphi(a)$ — функция Эйлера, показывающая число натуральных чисел, меньших a и взаимно простых с a.

84. Имеем последовательность чисел[1] $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, в которой $u_1 = u_2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

Покажите, что:

а) $u_1^{2m} + u_2^{2m} + \dots + u_n^{2m} \geqslant n\left(\frac{u_n u_{n+1}}{n}\right)^m$ при $m \geqslant 1$;

б) $u_n^{2k} + u_{n-1}^{2k} \geqslant \frac{u_{2n-1}^k}{2^{k-1}}$ при $k \geqslant 1$;

в) $(u_1 u_2)^m + (u_2 u_3)^m + \dots + (u_{2n-1} u_{2n})^m \geqslant 2n^{1-m} u_{2n}^{2m}$ при $m \geqslant 1$.

Докажите метрические неравенства в треугольнике, считая углы A, B, C острыми (№ 85—92):

85. а) $\frac{1}{\sin \widehat{A}} + \frac{1}{\sin \widehat{B}} + \frac{1}{\sin \widehat{C}} \geqslant 2\sqrt{3}$; б) $\frac{1}{\sin \frac{\widehat{A}}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\widehat{B}}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\widehat{C}}{2}} \geqslant 6$.

86. а) $\sqrt[n]{\cos \widehat{A}} + \sqrt[n]{\cos \widehat{B}} + \sqrt[n]{\cos \widehat{C}} \leqslant 3\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$;

---

[1] См., например: Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. М., «Наука», 1969.

б) $\sqrt[n]{\sin\widehat{A}}+\sqrt[n]{\sin\widehat{B}}+\sqrt[n]{\sin\widehat{C}}\leqslant 3\sqrt[n]{\frac{\sqrt{3}}{2}}, n\in\mathbf{N}.$

87. а) $\dfrac{1}{\sin^{\alpha}\frac{\widehat{A}}{2}}+\dfrac{1}{\sin^{\alpha}\frac{\widehat{B}}{2}}+\dfrac{1}{\sin^{\alpha}\frac{\widehat{C}}{2}}\geqslant 3\cdot 2^{\alpha}$ при $\alpha\geqslant 0$;

б) $\dfrac{1}{\cos^{\alpha}\frac{\widehat{A}}{2}}+\dfrac{1}{\cos^{\alpha}\frac{\widehat{B}}{2}}+\dfrac{1}{\cos^{\alpha}\frac{\widehat{C}}{2}}\geqslant 3\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$ при $\alpha\geqslant 0$.

88. а) $\dfrac{1}{\sin^{\alpha}\widehat{A}}+\dfrac{1}{\sin^{\alpha}\widehat{B}}+\dfrac{1}{\sin^{\alpha}\widehat{C}}\geqslant 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\alpha}$ при $\alpha\geqslant 0$;

б) $\dfrac{1}{\cos^{\alpha}\widehat{A}}+\dfrac{1}{\cos^{\alpha}\widehat{B}}+\dfrac{1}{\cos^{\alpha}\widehat{C}}\geqslant 3\cdot 2^{\alpha}$ при $\alpha\geqslant 0$.

89. $\sqrt[n]{\sin 2\widehat{A}}+\sqrt[n]{\sin 2\widehat{B}}+\sqrt[n]{\sin 2\widehat{C}}\leqslant 3\sqrt[n]{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$

90. $\operatorname{tg}^{\alpha}\widehat{A}+\operatorname{tg}^{\alpha}\widehat{B}+\operatorname{tg}^{\alpha}\widehat{C}\geqslant 3(\sqrt{3})^{\alpha}$ при $\alpha\geqslant 0$.

91. $\operatorname{ctg}^{\alpha}\widehat{A}+\operatorname{ctg}^{\alpha}\widehat{B}+\operatorname{ctg}^{\alpha}\widehat{C}\geqslant 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\alpha}$ при $\alpha\geqslant 2$.

92. а) $\operatorname{ctg}^{\alpha}\frac{\widehat{A}}{2}+\operatorname{ctg}^{\alpha}\frac{\widehat{B}}{2}+\operatorname{ctg}^{\alpha}\frac{\widehat{C}}{2}\geqslant 3(\sqrt{3})^{\alpha}$ при $\alpha\geqslant 1$;

б) $\operatorname{tg}^{\alpha}\frac{\widehat{A}}{2}+\operatorname{tg}^{\alpha}\frac{\widehat{B}}{2}+\operatorname{tg}^{\alpha}\frac{\widehat{C}}{2}\geqslant 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\alpha}$ при $\alpha\geqslant 2$.

93. Если $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, то

$$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+5}\leqslant 4\sqrt{3}.$$

94. $r_a^{\alpha}+r_b^{\alpha}+r_c^{\alpha}\geqslant 3(3r)^{\alpha}$ при $\alpha\geqslant 1$.

95. а) $\sqrt[n]{\frac{a}{r_a}}+\sqrt[n]{\frac{b}{r_b}}+\sqrt[n]{\frac{c}{r_c}}\leqslant\sqrt[n]{\frac{9R}{p}}$;

б) $\left(\frac{r_a}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{r_b}{b}\right)^{\alpha}+\left(\frac{r_c}{c}\right)^{\alpha}\geqslant 3\left(\frac{p}{3R}\right)^{\alpha}$ при $\alpha\geqslant 1$.

96. $\sqrt{p}<\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\leqslant\sqrt{3p}$.

97. а) $a^2+b^2+c^2\geqslant 4S\sqrt{3}$; б) $a^4+b^4+c^4\geqslant 16S^2$;

в) $a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}\geqslant 3\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^{n}$.

98. $ab+bc+ca\geqslant 4S\sqrt{3}$.

99. $p\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)\geqslant\frac{9}{4}$.

100. $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geqslant 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant\frac{9}{p}$.

101. Докажите неравенство

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \geqslant 3R^2,$$

где R, R_1, R_2, R_3 — длины радиусов окружностей, описанных около треугольников ABC, BEC, CEA, AEB, где E — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Найти наименьшее значение отношения

$$\frac{R_1^\alpha + R_2^\alpha + R_3^\alpha}{R^\alpha} \quad \text{при } \alpha \geqslant 2.$$

102. Около треугольника описана окружность радиуса R. Построены окружности радиусов r_1, r_2 и r_3, каждая из которых касается двух сторон треугольника и описанной окружности. Докажите неравенство

$$4r \leqslant r_1 + r_2 + r_3 \leqslant 2R.$$

103. В окружность вписан треугольник ABC. Продолжения его медиан пересекают окружность в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что:

а) $\left(\frac{|A_1M|}{|AM|}\right)^\alpha + \left(\frac{|B_1M|}{|BM|}\right)^\alpha + \left(\frac{|C_1M|}{|CM|}\right)^\alpha \geqslant 3$ при $\alpha \geqslant 1$;

б) $\left(\frac{|AM|}{|A_1M|}\right)^\alpha + \left(\frac{|BM|}{|B_1M|}\right)^\alpha + \left(\frac{|CM|}{|C_1M|}\right)^\alpha \geqslant 3$ при $\alpha \geqslant 1$,

где M — точка пересечения медиан.

104. Пусть x, y, z — отрезки касательных к вписанной окружности, заключенные между сторонами треугольника и параллельные соответствующим сторонам. Докажите неравенства:

а) $\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{b}\right)^\alpha + \left(\frac{z}{c}\right)^\alpha \geqslant 3^{1-\alpha}$; б) $\frac{S_1^\alpha + S_2^\alpha + S_3^\alpha}{S^\alpha} \leqslant 3^{1-2\alpha}$ при $\alpha \geqslant 1$,

где S_1, S_2, S_3 — площади отсеченных треугольников.

105. Пусть x_1, y_1, z_1 — расстояния от центра вписанной окружности до вершин треугольника, x_2, y_2, z_2 — расстояния от центров вневписанных окружностей соответственно до тех же вершин. Докажите, что

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^\alpha + \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^\alpha + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^\alpha \geqslant 3^{1-\alpha} \quad \text{при } \alpha \geqslant 1.$$

106. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — расстояния от центра описанной около треугольника окружности радиуса R до центра вписанной и вневписанных окружностей. Докажите, что

$$x_1^\alpha + x_2^\alpha + x_3^\alpha + x_4^\alpha \geqslant 4\,(R\sqrt{3})^\alpha \text{ при } \alpha \geqslant 2.$$

107. В вершинах треугольника ABC проведены касательные к описанной окружности радиуса R. Пусть a_1, a_2, a_3 — длины сторон получившегося треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что

$$a_1^\alpha + a_2^\alpha + a_3^\alpha \geqslant 3\,(2R\sqrt{3})^\alpha \text{ при } \alpha \geqslant 1.$$

108. $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ — величины внутренних углов вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$, S — его площадь, p — полупериметр. Докажите, что при $\alpha \geqslant 1$ выполняются неравенства:

а) $\sin^\alpha \widehat{A} + \sin^\alpha \widehat{B} + \sin^\alpha \widehat{C} + \sin^\alpha \widehat{D} \geqslant 4\left(\frac{4S}{p^2}\right)^\alpha$;

б) $\cos^\alpha \frac{\widehat{A}}{2} + \cos^\alpha \frac{\widehat{B}}{2} + \cos^\alpha \frac{\widehat{C}}{2} + \cos^\alpha \frac{\widehat{D}}{2} \geqslant 4\left(\frac{\sqrt{2S}}{p}\right)^\alpha$;

в) $\sin^\alpha \frac{\widehat{A}}{2} + \sin^\alpha \frac{\widehat{B}}{2} + \sin^\alpha \frac{\widehat{C}}{2} + \sin^\alpha \frac{\widehat{D}}{2} \geqslant 4\left(\frac{\sqrt{2S}}{p}\right)$;

г) $\operatorname{tg}^\alpha \frac{\widehat{A}}{2} + \operatorname{tg}^\alpha \frac{\widehat{B}}{2} + \operatorname{tg}^\alpha \frac{\widehat{C}}{2} + \operatorname{tg}^\alpha \frac{\widehat{D}}{2} \geqslant 4$.

109. В n-угольник вписана окружность, точки касания последовательно соединены. M — произвольная точка окружности, p_1, p_2, ..., p_n — расстояния от M до сторон вписанного многоугольника, q_1, q_2, ..., q_n — расстояния от M до сторон описанного многоугольника.

Докажите, что $\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^\alpha + \left(\frac{p_2}{q_2}\right)^\alpha + \ldots + \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^\alpha \geqslant n$ при $\alpha \geqslant 0$.

110. В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник. Пусть x_1, x_2, ..., x_n — расстояния от произвольной точки окружности до вершин многоугольника. Докажите, что: а) $C_2(x) = R\sqrt{2}$; б) $C_4(x) = R\sqrt[4]{6}$. Получите неравенство

$$x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha \leqslant n\,(R\sqrt{2})^\alpha \text{ при } \alpha \leqslant 2.$$

111. Около окружности радиуса r описан правильный $2n$-угольник. Из произвольной точки M окружности опущены перпендикуляры на все его стороны (или на их продолжения). Пусть x_1, x_2, ..., x_n — расстояния от M до сторон многоугольника. Докажите, что: а) $C_1(x) = r$; б) $C_2(x) = r\sqrt{1,5}$. Получите неравенство

$$x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha \leqslant 2nr^\alpha \quad \text{при } \alpha \leqslant 1.$$

112. В треугольной пирамиде с прямым трехгранным углом при вершине двугранные углы при основании равны α, β, γ. Докажите, что:

а) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9}$; б) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \sqrt{3}$;

в) $\frac{1}{\cos^n\alpha} + \frac{1}{\cos^n\beta} + \frac{1}{\cos^n\gamma} \geqslant 3^{\frac{2-n}{2}}$ при $n \geqslant 2$.

113. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с тремя его гранями углы α, β, γ. Докажите неравенства:

а) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant \sqrt{3}$; б) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \sqrt{6}$;

в) $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\geqslant 3\sqrt{3}$;

г) $\cos^n\alpha+\cos^n\beta+\cos^n\gamma\geqslant 3\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^n$ при $n\geqslant 2$.

114. Докажите, что из всех треугольных пирамид, описанных около шара радиуса r, правильный тетраэдр имеет наименьшее произведение высот h_1, h_2, h_3, h_4. Докажите, что:

а) $h_1^\alpha+h_2^\alpha+h_3^\alpha+h_4^\alpha\geqslant 4(4r)^\alpha$ при $\alpha\geqslant -1$;

б) $\frac{1}{h_1^\alpha}+\frac{1}{h_2^\alpha}+\frac{1}{h_3^\alpha}+\frac{1}{h_4^\alpha}\geqslant\frac{4}{(4r)^\alpha}$ при $\alpha\geqslant -1$.

115. Из точки O, лежащей в основании ABC тетраэдра $SABC$, проведены прямые OA_1, OB_1, OC_1, соответственно параллельные ребрам $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$, до пересечения их соответственно с гранями SBC, SCA, SAB в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что

$$\left(\frac{|OA_1|}{|SA|}\right)^\alpha+\left(\frac{|OB_1|}{|SB|}\right)^\alpha+\left(\frac{|OC_1|}{|SC|}\right)^\alpha\geqslant 3^{1-\alpha}\quad\text{при }\alpha\geqslant 1.$$

116. Докажите, что если через точку O, расположенную внутри пирамиды $ABCD$, проведены отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, где A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат на гранях, соответственно противоположных вершинам A, B, C и D, то выполняется неравенство

$$\left(\frac{|OA_1|}{|AA_1|}\right)^\alpha+\left(\frac{|OB_1|}{|BB_1|}\right)^\alpha+\left(\frac{|OC_1|}{|CC_1|}\right)^\alpha+\left(\frac{OD_1}{DD_1}\right)^\alpha\geqslant 4^{1-\alpha}\quad\text{при }\alpha\geqslant 1.$$

117. M — произвольная точка основания n-угольной пирамиды, боковые грани которой равновелики, x_1, x_2, ..., x_n — расстояния от точки M до боковых граней. Докажите, что

$$x_1^\alpha+x_2^\alpha+\ldots+x_n^\alpha\geqslant n\left(\frac{3V}{S}\right)^\alpha\quad\text{при }\alpha\geqslant 1,$$

где V — объем пирамиды, S — площадь боковой грани.

118. Пусть α_1 и β_1, α_2 и β_2, ..., α_n и β_n — пары плоских углов при основаниях боковых граней, прилежащих к общему ребру n-угольной пирамиды. Докажите, что

$$\left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}\right)^k+\left(\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}\right)^k+\ldots+\left(\frac{\sin\alpha_n}{\sin\beta_n}\right)^k\geqslant n\quad\text{при }k\geqslant 0.$$

§ 2. Задачи на экстремумы

Общие вопросы нахождения экстремальных значений функций рассматриваются в курсе дифференциального исчисления, однако многие задачи на экстремумы можно (иногда даже проще) решать «элементарными» средствами, в частности опираясь на следующие свойства средних величин при $\alpha\leqslant\beta$.

1^0. *Выполняется неравенство* $C_\alpha\leqslant C_\beta$, т. е.

$$\left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right)^\alpha \leqslant \left(\frac{x_1^\beta + x_2^\beta + \ldots + x_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

2°. *Если C_α — величина постоянная, то C_β принимает наименьшее значение при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.*

3°. *Если же C_β — величина постоянная, то C_α принимает наибольшее значение при том же условии.*

В частности, из неравенства Коши

$$C_0 \leqslant C_1$$

вытекают две теоремы: о наименьшем значении суммы при постоянном произведении переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и о наибольшем значении произведения при постоянной сумме. В обоих случаях экстремум наступает при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Пример 1. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = (1 + x)^n + (1 - x)^n \text{ на } [-1; 1].$$

Решение. Воспользовавшись неравенством $C_n \geqslant C_1$ (свойство монотонности среднего степенного), получим:

$$\left(\frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{(1+x)+(1-x)}{2} = 1.$$

Значит, $y_{\min} = 2$ при $x = 0$.

Для нахождения наибольшего значения функции воспользуемся очевидными неравенствами:

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^n \leqslant \frac{1+x}{2} \text{ и } \left(\frac{1-x}{2}\right)^n \leqslant \frac{1-x}{2}$$

(так как по условию $0 \leqslant \frac{1+x}{2} \leqslant 1$ и $0 \leqslant \frac{1-x}{2} \leqslant 1$). Сложив эти неравенства, получим: $y_{\max} = 2^n$.

Пример 2. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции

$$u = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

если известно, что

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant a^2, \quad y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \leqslant b^2,$$

где a, b — положительные числа.

Решение. В силу неравенства Буняковского — Коши (см. пример 1, в, § 1)

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 \leqslant$$
$$\leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2),$$

или

$$u^2 \leqslant a^2b^2,$$

откуда получаем: $-ab \leqslant u \leqslant ab$.

Значит, $u_{\min} = -ab$, $u_{\max} = ab$.

Пример 3. Точка M лежит внутри треугольника, k_1, k_2, k_3 — расстояния от M до сторон треугольника, h_1, h_2, h_3 — соответствующие высоты. Найдем наименьшее значение выражения

$$\left(\frac{k_1}{h_1}\right)^\alpha + \left(\frac{k_2}{h_2}\right)^\alpha + \left(\frac{k_3}{h_3}\right)^\alpha \quad \text{при } \alpha \geqslant 1.$$

Решение. Имеем:

$$2S = ak_1 + bk_2 + ck_3 = ah_1 = bh_2 = ch_3,$$

где S — площадь треугольника.

Разделим обе части равенства $ak_1 + bk_2 + ck_3 = ah_1$ на ah_1:

$$\frac{k_1}{h_1} + \frac{b}{a} \cdot \frac{k_2}{h_1} + \frac{c}{a} \cdot \frac{k_3}{h_1} = 1.$$

Так как $\frac{b}{a} = \frac{h_1}{h_2}$ и $\frac{c}{a} = \frac{h_1}{h_3}$,

то

$$\frac{k_1}{h_1} + \frac{k_2}{h_2} + \frac{k_3}{h_3} = 1.$$

В силу свойства монотонности среднего степенного получаем:

$$\left(\frac{k_1}{h_1}\right)^\alpha + \left(\frac{k_2}{h_2}\right)^\alpha + \left(\frac{k_3}{h_3}\right)^\alpha \geqslant 3\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha = \frac{1}{3^{\alpha-1}} \quad \text{при } \alpha \geqslant 1.$$

Значит, наименьшее значение данного выражения равно $\frac{1}{3^{\alpha-1}}$.

УПРАЖНЕНИЯ

119. Найдите наибольшие значения функций:

а) $y = x^n (a - x)$, $0 < x < a$;
б) $y = x^n (a - bx)$, $0 < bx < a$, $x > 0$.

120. Найдите наименьшие значения функций:

а) $y = x^2 (1 + x)$, $-1 < x < 0$;
б) $y = x^n (a + x)$, $-a < x < 0$.

121. Найдите наибольшие значения функций $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$:

а) $y = \sin x \sin 2x$;
б) $y = \sin x \cos^3 x$.

122. Вычислите наибольшие значения функций:

а) $y = (2 - \cos x) \sin^2 x$;
б) $y = \operatorname{tg} x \,(3 - \operatorname{tg}^2 x)$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

123. Найдите наибольшие и наименьшие значения функций:

а) $y = \sin^{2n} x + \cos^{2n} x$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $u = \sin x + \sin y + \sin (x + y),\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

124. Найдите наименьшие значения функций:

а) $y = x + \frac{1}{x^2}$; б) $y = \frac{x^n + n - 1}{x}$, $x > 0$.

125. Найдите наибольшие значения функций:

$$u = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2,\quad v = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2,$$

если

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a^2,\quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = b^2.$$

126. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$u = \sum_{i=1}^{k} (1 + x_i)^n + \sum_{i=1}^{k} (1 - x_i)^n,$$

где $n,\ k \in \mathbf{N}$, $-1 \leqslant x_i \leqslant 1$.

127. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \left(\frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x}\right)^m + \left(\frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}\right)^m,$$

где $m \in \mathbf{N}$.

128. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 - 2mx + n^2} + \sqrt{x^2 - 2px + q^2},\quad 0 < m < n,\quad 0 < p < q.$$

129. При каком значении x произведение $(1 - x)^4 (1 - x^2) \times (1 + 2x)^2$ достигает наибольшего значения и каково это значение?

130. Найдите наибольшее значение функции

$$u = \frac{(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

131. Найдите наименьшее значение функции

$$u = \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{x_1x_2^2x_3^3 \ldots x_n^n}.$$

132. В точках A и B висят два фонаря, из которых один имеет силу света, равную J свечам, а другой — в 8 раз большую. Найдите на $[AB]$ наименее освещенную точку, если $|AB| = l$.

133. Через внутреннюю точку P треугольника ABC проведены три отрезка: $[PA_1] \parallel [BC]$ $(A_1 \in [AC])$, $[PB_1] \parallel [AC]$ $(B_1 \in [AB])$, $[PC_1] \parallel [AB]$ $(C_1 \in [BC])$. Найдите наименьшие значения выражений при $\alpha \geqslant 1$:

$$\left(\frac{|PA_1|}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{|PB_1|}{b}\right)^\alpha + \left(\frac{|PC_1|}{c}\right)^\alpha,\quad \left(\frac{a}{|PA_1|}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{|PB_1|}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{|PC_1|}\right)^\alpha$$

134. Пусть x, y, z — расстояния от центра окружности, вписанной в треугольник ABC, до вершин. Найдите наименьшее значение отношения

$$\frac{a^{\alpha} x^{2\alpha} + b^{\alpha} y^{2\alpha} + c^{\alpha} z^{2\alpha}}{a^{\alpha} b^{\alpha} c^{\alpha}} \quad \text{при } \alpha \geqslant 1.$$

135. В данный сегмент впишите прямоугольник наибольшей площади так, чтобы одна сторона лежала на хорде.

136. Через внутреннюю точку треугольника площади S проведены прямые, параллельные сторонам. S_1, S_2, S_3 — площади получившихся треугольников. Найдите наименьшее значение отношения $(S_1^{\alpha} + S_2^{\alpha} + S_3^{\alpha}) : S^{\alpha}$ при $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$.

137. Найдите наименьшее значение выражения

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2n},$$

где a, b, c — стороны треугольника, x, y, z — соответствующие стороны треугольника с вершинами в основаниях высот данного треугольника.

Найдите наибольшее значение выражения

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\alpha} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\alpha} \quad \text{при } \alpha \leqslant 1.$$

138. Через внутреннюю точку O треугольника ABC проведены отрезки OA, OB, OC (рис. 7). Найдите наименьшее значение выражения

$$\left(\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}\right)^k + \left(\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}\right)^k + \left(\frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2}\right)^k, \quad k \geqslant 0.$$

139. Найдите наименьшее значение выражения $k_1^{\alpha} + k_2^{\alpha} + k_3^{\alpha}$ при $\alpha \geqslant 1$, где k_1, k_2, k_3 — расстояния от произвольной внутренней точки правильного треугольника до его сторон.

140. Из всех прямоугольных параллелепипедов данного объема куб имеет наименьшую диагональ. Докажите.

141. Требуется изготовить сосуд с заданной площадью поверхности S в форме прямоугольного параллелепипеда (без крышки). Каковы должны быть размеры сосуда, чтобы емкость его была наибольшей?

142. На какой высоте над центром круглого стола надо повесить лампочку, чтобы на краях стола была наибольшая освещенность?

143. В шар вписан конус, имеющий наибольшую полную поверхность. Найдите угол между образующей и плоскостью основания.

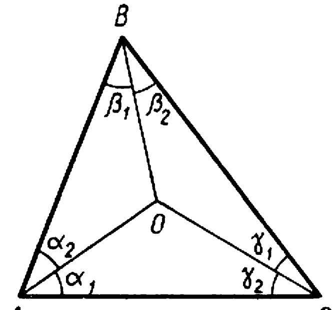

Рис. 7

144. Из всех правильных треугольных пирамид с данной боковой поверхностью пирамида с прямым трехгранным углом при вершине имеет наибольший объем. Докажите.

145. Ромб со стороной a вращается вокруг оси, проходящей через вершину острого угла перпендикулярно большей диагонали. При какой величине этого угла объем тела вращения будет наибольшим?

146. Через боковые ребра тетраэдра проведены биссекториальные плоскости. Покажите, что эти плоскости пересекаются по одной прямой. Найдите наименьшее значение отношения $(V_1^\alpha + V_2^\alpha + V_3^\alpha) : V^\alpha$, где $\alpha \geqslant 1$, V — объем данного тетраэдра, V_1, V_2, V_3 — объемы получившихся биссекториальных тетраэдров.

147. Через все ребра тетраэдра проведены биссекториальные плоскости. Покажите, что эти плоскости пересекаются в одной точке. Найдите наименьшее значение отношения $(V_1^\alpha + V_2^\alpha + V_3^\alpha + V_4^\alpha) : V^\alpha$, где $\alpha \geqslant 1$, $V_1, V_2, V_3\ V_4$— объемы получившихся тетраэдров, V — объем данного тетраэдра.

Глава III

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

В этой главе мы приводим задачи, которые предлагались на различных математических олимпиадах школьников. Предложенная здесь классификация задач чисто условная.

§ 1. Числовые равенства и неравенства

Пример 1. Докажем, что

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200}.$$

Доказательство. Преобразуем правую часть равенства:

$$\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{200}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{100}\right)=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{199}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{200}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{200}\right)=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{199}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{200}\right).$$

Получили выражение, стоящее в левой части равенства.

Пример 2. Докажем неравенство

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{n(3n-1)}\geqslant\frac{1}{n+1}.$$

Р е ш е н и е. Неравенство можно доказать методом математической индукции (см. «Практикум по алгебре»). Рассмотрим другой способ доказательства, основанный на использовании свойств среднего степенного. Применив неравенство $C_{-1} \leqslant C_1$ для чисел $1 \cdot 2, 2 \cdot 5, 3 \cdot 8, \ldots, n(3n-1)$, получим:

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 8} + \ldots + \frac{1}{n(3n-1)} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{n^2}{1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \ldots + n(3n-1)}.$$

Вычислим сумму S_1 в знаменателе дроби:

$$S_1 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \ldots + n(3n-1) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k(3k-1) = \sum_{k=1}^{n} 3k^2 - \sum_{k=1}^{n} k = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k.$$

Но

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Значит,

$$S_1 = \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1).$$

Окончательно получаем:

$$S \geqslant \frac{n^2}{S_1} = \frac{1}{n+1}.$$

П р и м е р 3. Сравним с единицей число a, если

$$a = 0{,}99999^{1{,}00001} \cdot 1{,}00001^{0{,}99999}.$$

Р е ш е н и е. Представим числа, входящие в данное выражение, следующим образом:

$$0{,}99999 = 1 - \alpha, \quad 1{,}00001 = 1 + \alpha,$$

где $\alpha = 0{,}00001$. Тогда

$$a = (1-\alpha)^{1+\alpha}(1+\alpha)^{1-\alpha} = (1-\alpha^2)\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{\alpha}.$$

Так как $1 - \alpha^2 < 1$, $1 - \alpha < 1$ и $1 + \alpha > 1$, то $a < 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

148. Докажите равенства:

а) $\frac{1}{1 \cdot 199} + \frac{1}{3 \cdot 197} + \frac{1}{5 \cdot 195} + \ldots + \frac{1}{199 \cdot 1} = 0{,}01\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \right.$ $\left. + \ldots + \frac{1}{199}\right)$;

б) $101\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{101}\right)=\frac{100}{1}+\frac{99}{2}+\frac{98}{3}+\ldots+\frac{2}{99}+\frac{1}{100}$;

в) $\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{198}-\frac{1}{200}\right)=$
$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right).$

149. Найдите суммы:

а) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 101}$;

б) $\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^{2^2}}+\frac{3\cdot 5}{2^{2^3}}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^{2^4}}+\ldots+\frac{(2^{2^2}+1)(2^{2^1}+1)\ldots(2^{2^{99}}+1)}{2^{2^{101}}}$.

150. Докажите неравенства:

а) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{9999}{10\,000}<0{,}01$;

б) $1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\ldots 100^{100}<67^{5050}$.

151. Докажите неравенства двумя способами:

а) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$;

б) $\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}<\frac{3}{4}$.

152. Докажите, что сумма

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

при достаточно большом n будет больше всякого наперед заданного числа N.

153. Сравните числа:

а) $\frac{37}{67}$ и $\frac{377}{677}$;

б) 31^{11} и 17^{14};

в) 100^{20} и 9000^{10};

г) $\frac{10^{1999}+1}{10^{2000}+1}$ и $\frac{10^{2000}+1}{10^{2001}+1}$;

д) $\sqrt{1977}+\sqrt{1979}$ и $2\sqrt{1978}$;

е) $\log_{81}576$ и $\log_{36}192$.

154. Не производя указанных действий, установите, правильной или неправильной дробью является число

$$\frac{244\cdot 395-151}{244+395\cdot 243}.$$

155. Докажите, не пользуясь таблицей, что

$$\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8+\log_8 4>5.$$

156. Докажите, что

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(4\sqrt{2}+3\sqrt{3})\cdot\log_{\sqrt{6}+1}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+$$
$$+\log^2_{\sqrt{6}+7}(2\sqrt{6}+5)+1=0.$$

§ 2. Систематические дроби и иррациональности

Пример 1. Вычислим $\dfrac{1}{1,\underbrace{00\ldots0}_{99\text{ нулей}}1}$ с 200 знаками после запятой.

Решение. Пусть $0,00\ldots01 = a$. Тогда

$$\frac{1}{1+a}=\frac{1+a-a}{1+a}=1-\frac{a}{1+a}=1-a\cdot\frac{1}{1+a}=1-a\left(1-\frac{a}{1+a}\right)=$$
$$=1-a+a^2\cdot\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-a^3\,\frac{1}{1+a}.$$

Очевидно, что

$$a^3\cdot\frac{1}{1+a}<a^3<\frac{1}{10^{300}}.$$

Поэтому с требуемой точностью искомое число равно:

$$1-a+a^2=1-\frac{1}{10^{100}}+\frac{1}{10^{200}}=0,\underbrace{9\ldots9}_{100}\,\underbrace{00\ldots0}_{99}1.$$

Пример 2. Докажем, что число

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\;\ldots\;+\frac{1}{n}$$

ни при каком натуральном n не может быть целым.

Доказательство. Приведем все слагаемые к общему знаменателю. Ясно, что общий знаменатель — число четное.

Из всех дробей данной суммы рассмотрим ту, в знаменатель которой входит сомножителем число 2 в наивысшей по сравнению с остальными знаменателями степени, т. е. дробь со знаменателем вида $k\cdot 2^t$.

При приведении дробей к общему знаменателю дополнительным множителем к рассматриваемой дроби будет нечетное число; дополнительные множители к остальным дробям будут четными числами, в состав которых войдет сомножителем число 2. В числителе получим сумму, состоящую из $n-2$ четных слагаемых и одного нечетного. Так как числитель — нечетное, а знаменатель — четное число, то вся дробь не может быть целым числом.

Пример 3. Докажем, что сумма трех чисел, обратных трем последовательным натуральным числам, обращается в смешанную периодическую дробь.

Решение. Имеем:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{3n^2+6n+2}{n(n+1)(n+2)}.$$

Сначала убедимся, что в разложении не может быть получена конечная десятичная дробь, т. е. убедимся в том, что знаменатель рассматриваемой дроби содержит множители, отличные от 2 и 5. Действительно, знаменатель дроби, являясь произведением трех последовательных чисел, делится на 3, в то время как числитель на 3 не делится ни при каких $n \in \mathbf{N}$.

Теперь докажем, что знаменатель несократимой дроби не взаимно прост с 10, т. е. делится на 2 или на 5.

Из двух чисел n и $n+1$ одно четно, а другое нечетно.

Если n нечетно, то нечетно и $3n^2$, а следовательно, нечетным будет весь числитель, в то время как знаменатель как произведение трех последовательных чисел содержит сомножителем число 2.

Если же n четно ($n = 2k$), то рассматриваемую дробь можно сократить на 2:

$$\frac{3n^2 + 6n + 2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{3 \cdot 4k^2 + 6 \cdot 2k + 2}{2k(2k+1)(2k+2)} = \frac{3 \cdot 2k^2 + 6k + 1}{2k(2k+1)(k+1)},$$

причем и в этом случае после сокращения дроби знаменатель содержит сомножителем число 2. Следовательно, при обращении данной дроби в десятичную получается смешанная периодическая дробь.

Пример 4. Докажем, что $\sin 10°$ — иррациональное число.

Решение. В соответствии с формулой

$$\sin 3\alpha = \sin \alpha\,(3 - 4\sin^2 \alpha)$$

запишем:

$$\sin 30° = \sin 10°\,(3 - 4\sin^2 10°).$$

Обозначив $2 \sin 10°$ через x, получим уравнение

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Делители свободного члена $+1$ и -1 не являются корнями полученного уравнения. Других рациональных корней нет. Значит, уравнение вообще не имеет рациональных корней. Один по крайней мере действительный иррациональный корень есть. Им является число $2 \sin 10°$. Значит, число $\sin 10°$ иррациональное.

УПРАЖНЕНИЯ

157. Вычислите:

а) $\sqrt{\underbrace{0,99\ldots9}_{100\text{ цифр}}}$ со 100 знаками после запятой;

б) $\sqrt{\underbrace{0,11\ldots1}_{100\text{ цифр}}}$ с 200 знаками после запятой.

158. Докажите, что в числе $(6 + \sqrt{37})^{999}$ первые 999 знаков после запятой — нули.

159. Вычислите приближенно $\dfrac{\sqrt{1,000001} - 1}{0,0000001}$.

160. Решите приближенно уравнение

$$0,000001x^2 - 4x + 1 = 0$$

и оцените погрешность.

161. Докажите, что среди первых 10 млн. цифр разложения $\sqrt{2}$ в десятичную дробь ни одна цифра не повторяется 5 000 001 раз подряд.

162. В десятичной дроби 0,1234567891011121314... выписаны подряд все натуральные числа. Докажите, что дробь непериодическая.

163. Докажите, что число 0,101001000100001... иррациональное.

164. Докажите, что числа

а) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}$, б) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+k}$

ни при каких натуральных n и k не могут быть целыми.

165. Докажите, что сумма дробей $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$ и $\frac{2}{2n+1}$ обращается в смешанную десятичную периодическую дробь при любом $n \in \mathbf{N}$.

166. Докажите, что дробь $\frac{n}{n^2+n+1}$ обращается в чистую периодическую десятичную дробь при любом $n \in \mathbf{N}$.

167. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}$; б) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3}$.

168. Известно, что $(\sqrt{2}-1)^7=\sqrt{57122}-\sqrt{57121}$. Докажите, что $(\sqrt{2}+1)^7=\sqrt{57122}+\sqrt{57121}$.

169. Докажите иррациональность чисел $\cos 20°$; $\sin 40°$; $\operatorname{tg} 1°$.

170. Известно, что числа a, b и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ рациональные. Докажите, что $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ тоже рациональные.

171. Докажите, что не существует рациональных чисел a и b таких, чтобы выполнялось равенство $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt[3]{2}$.

172. Существует ли хотя бы одно число a такое, чтобы оба числа $a+\sqrt{15}$ и $\frac{1}{a}-\sqrt{15}$ были целыми?

173. Докажите, что выражение $99999+111\,111\sqrt{3}$ нельзя представить в виде

$$(a+b\sqrt{3})^2,$$

где $a, b \in \mathbf{Q}$.

§ 3. Последовательности и пределы

Пример 1. Найдем предел суммы

$$S_n=\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

при $n \to \infty$.

Решение. Сначала попробуем упростить S_n. Так как дробь

$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ можно представить как разность $\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}$, то

$$\frac{3}{4}=1-\frac{1}{2^2},$$

$$\frac{5}{36}=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Складывая эти равенства, получим:

$$S_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1.$$

Пример 2. Пусть $y\neq -1$. Положим,

$$x_1=\frac{y-1}{y+1},\quad x_2=\frac{x_1-1}{x_1+1},\quad x_3=\frac{x_2-1}{x_2+1},\ldots.$$

Чему равен y, если $x_{1978}=-\frac{1}{3}$?

Решение. Подставив значение x_1 во второе равенство, после упрощений получим:

$$x_2=-\frac{1}{y}.$$

Далее

$$x_3=\frac{y+1}{1-y},\quad x_4=y,\quad x_5=\frac{y-1}{y+1}=x_1.$$

Следовательно,

$$x_5=x_1,\quad x_6=x_2,\quad x_7=x_3,\quad x_8=x_4,\ldots,\ x_{1978}=x_2=-\frac{1}{y},$$

откуда $y=3$.

УПРАЖНЕНИЯ

174. Пусть дано число N и задана последовательность положительных чисел x_1, x_2, ..., x_n, причем каждый последующий член образуется по правилу

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{N}{x_{n-1}}\right).$$

Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{N}.$$

175. Последовательность определяется рекуррентной формулой

$$u_n = (\alpha + \beta)u_{n-1} - \alpha\beta u_{n-2}$$

и начальными значениями $u_1 = \alpha + \beta$, $u_2 = \dfrac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$. Найдите общий член последовательности.

176. Даны две последовательности: $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ $(x_0 > 0)$ и $y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ $(y_0 > 0)$, причем

$$x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}, \quad y_n = \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}.$$

Докажите, что пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ существуют и равны между собой.

177. Даны два положительных числа a и b $(a > b)$ и две последовательности:

$$\begin{array}{ll}
a_1 = \dfrac{a+b}{2}, & b_1 = \dfrac{2ab}{a+b}, \\
a_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}, & b_2 = \dfrac{2a_1b_1}{a_1+b_1}, \\
\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots \\
a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}, & b_{n+1} = \dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}. \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Найдите пределы этих последовательностей.

178. Дано 1979 чисел: $x_1 = 0$, $x_2, \ldots, x_{1978}, x_{1979} = 0$. Причем $x_i = \dfrac{x_{i-1} + x_{i+1}}{4} + 1$ при любом $i = 2, 3, \ldots, 1978$. Докажите, что:

а) $0 \leqslant x_i \leqslant 2$ при $i = 1, 2, \ldots, 1979$;

б) $x_1 < x_2 < \ldots < x_{990}$, $x_{991} > x_{992} > \ldots > x_{1979}$;

в) $x_1 = x_{1979}$, $x_2 = x_{1978}, \ldots$.

179. Найдите сумму $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \ldots + \dfrac{n}{(n+1)!}$ и ее предел при $n \to \infty$.

180. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{14}{20} \cdot \dfrac{27}{35} \ldots \dfrac{2n^2 - n - 1}{2n^2 + n - 1}\right)$.

181. Докажите, что при $x \neq 0$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \ldots \cos\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\sin x}{x}.$$

182. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

а) $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ раз}};$

б) $x_n = \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots\sqrt{2}}}}}_{n \text{ раз}};$

в) $x_n = 1 + \left.\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{2}}}}\right\} n \text{ раз}.$

§ 4. Различные алгебраические задачи

Пример 1. Разложим на два множителя многочлен

$$1 + x^5 + x^{10}.$$

Решение. Имеем:

$$x^{10} + x^5 + 1 = \frac{(x^{10} + x^5 + 1)(x^5 - 1)}{x^5 - 1} = \frac{x^{15} - 1}{x^5 - 1} =$$

$$= \frac{(x^3 - 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1)}{(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)} = \frac{(x^2 + x + 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1)}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}.$$

Разделим второй множитель числителя дроби на ее знаменатель:

$$\frac{x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1.$$

Следовательно,

$$x^{10} + x^5 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1).$$

Пример 2. Вычислим сумму

$$a^{2000} + \frac{1}{a^{2000}},$$

если $a^2 - a + 1 = 0$.

Решение. Из равенства $a^2 - a + 1 = 0$ следует:

$$a - 1 + \frac{1}{a} = 0 \text{ или } a + \frac{1}{a} = 1.$$

Кроме того,

$$a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1) = 0,$$

откуда $a^3 = -1$. Теперь имеем:

$$a^{2000} + \frac{1}{a^{2000}} = (a^3)^{666}a^2 + \frac{1}{(a^3)^{666}a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 =$$

$$= 1 - 2 = -1.$$

П р и м е р 3. Даны три утверждения:

1) уравнение $x + \frac{1}{x} = a$ не имеет действительных решений;

2) справедливо равенство $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = 2 - a$;

3) система $\begin{cases} x + y^2 = a, \\ x - \sin^2 y = -3 \end{cases}$ имеет единственное решение.

При каких значениях a два из этих утверждений будут верны, а третье неверно?

Р е ш е н и е. Перепишем второе равенство в следующем виде:

$$\sqrt{(a-2)^2} = 2 - a, \text{ или } |a - 2| = 2 - a.$$

Следовательно, $2 - a \geqslant 0$, т. е. $a \leqslant 2$.

Преобразуем уравнение $x + \frac{1}{x} = a$ к виду

$$x^2 - ax + 1 = 0.$$

Для того чтобы это уравнение не имело действительных корней, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант $a^2 - 4 < 0$, т. е. $-2 < a < 2$.

Перейдем к последнему пункту. Пусть пара чисел $(x_0; y_0)$ — одно из решений данной системы. Очевидно, что пара чисел $(x_0; -y_0)$ также удовлетворяет системе. Следовательно, для выполнения условия о единственности решения системы необходимо, чтобы $y_0 = -y_0$, т. е. чтобы $y_0 = 0$, тогда $a = x = -3$. Подставляя в первое уравнение системы вместо a число -3, убеждаемся, что при $a = -3$ система имеет единственное решение. Итак, $a = -3$.

Теперь видим, что если $-2 < a < 2$, то уравнения 1) и 2) выполняются, а утверждение 3) не выполняется.

Если же $a = -3$, то выполняются утверждения 2) и 3), но не выполняется утверждение 1).

Наконец, утверждения 1) и 3) не выполняются одновременно. Значит, два утверждения будут верны, а третье неверно при $a = -3$ или при $a \in]-2; 2[$.

УПРАЖНЕНИЯ

183. Разложите на множители:

а) $1 + x + x^5$ (на 2 множителя);
б) $1 + x^4 + x^8$ (на 3 множителя).

184. Вычислите $a^{1978} + \frac{1}{a^{1978}}$, если $a^2 + a + 1 = 0$.

185. Докажите, что если $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$, то

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha \quad (n \in N).$$

186. Даны три утверждения:

1) трехчлен $x^2 + x + a$ неотрицателен при всех x;
2) функция $y = \log_{2a} x$ убывающая;

3) система $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ y + \cos x = 2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

При каких значениях a два утверждения верны, а одно ложно?

187. m и n — целые положительные числа. Известно, что из следующих четырех утверждений:

1) $m + 1$ делится на n;
2) m равно $2n + 5$;
3) $m + n$ делится на 3;
4) $m + 7n$ — простое число,

три верных, а одно неверное. Найдите все возможные пары m, n.

188. Найдите число x, если известно, что из следующих трех утверждений:

а) x — целое число;
б) $x^2 - 3x$ — целое отрицательное число;
в) $x + \frac{1}{x}$ — целое положительное число,

одно неверное.

189. Относительно $\triangle ABC$ утверждают, что:

1) треугольник ABC прямоугольный;
2) $\widehat{BAC} = 30°$;
3) $|AB| = 2|BC|$; 4) $|AC| = 2|BC|$.

Известно, что два из этих утверждений верны, а два других нет. Найдите периметр треугольника, если $|BC| = 1$.

§ 5. «Игровые» и логические задачи

Пример 1. Игра, в которой принимают участие двое, состоит в следующем. Берутся две кучки спичек. Попеременно каждый из играющих отбрасывает одну из них, а оставшуюся разбивает на две, и так до тех пор, пока в каждой кучке не останется по одной спичке. Сделавший последний ход выигрывает. Кто победит (начинающий игру или его партнер), если в начале игры в одной кучке было 20 спичек, а в другой — 25?

Решение. Решим задачу в общем виде. Пусть перед началом игры в каждой кучке лежит по нечетному числу спичек. Тогда при правильной игре проигрывает начинающий. В самом деле, после того как начинающий выбросит одну из кучек, останется кучка с нечетным числом спичек, которую он разбивает на две кучки: в одной — нечетное число спичек, а в другой — четное. Теперь второй игрок выбрасывает кучку с нечетным числом спичек, а оставшуюся кучку разбивает на две так, чтобы в каждой из них было нечетное число спичек. Продолжая игру, второй игрок последним делит кучку из двух спичек на две части, в каждой из которых будет по одной спичке и, следовательно, он выигрывает.

Таким образом, проигрышным положением является ситуация, когда лежат две кучки, каждая из которых содержит нечетное число спичек.

Если же в одной кучке четное число спичек (например, 20), а в другой — нечетное (например, 25), то, для того чтобы выиграть, начинающий должен выбросить вторую кучку, а оставшуюся кучку из четного числа спичек разделить на две кучки, каждая из которых должна содержать нечетное число спичек. Таким образом, второй игрок будет поставлен в проигрышное положение.

Пример 2. В каждую клетку квадратной таблицы размером 25×25 вписано произвольно одно из чисел: $+1$ или -1. Под каждым из столбцов записывается произведение всех чисел данного столбца, а справа от каждой строки — произведение всех чисел данной строки. Докажем, что сумма всех пятидесяти произведений не может быть равной нулю.

Решение. Если перемножить все пятьдесят произведений, то в итоговое произведение каждое из чисел таблицы войдет дважды: один раз — по строке, второй — по столбцу. Следовательно, итоговое произведение равно $+1$.

Поскольку итоговое произведение положительно, то можно утверждать, что в его состав вошло четное число произведений-сомножителей, равных -1, и, значит, сумма всех пятидесяти произведений не может равняться нулю.

Пример 3. В детском садике в n теремках, расположенных по окружности, сидят n девочек, по одной в каждом теремке. Время от времени две девочки одновременно перебегают в соседние теремки в противоположных направлениях (одна — по часовой стрелке, другая — против). Докажем, что девочки никогда не смогут собраться вместе в одном теремке, если n четно.

Решение. Занумеруем теремки по порядку (скажем, по часовой стрелке) числами от 1 до n. Обозначим число девочек в k-м теремке в какой-нибудь момент через a_k.

Рассмотрим выражение

$$S = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + k \cdot a_k + \ldots + n \cdot a_n, \text{ где } k = 1, 2, \ldots n$$

и покажем, что когда две девочки одновременно перебегают в соседние теремки в противоположных направлениях, то S либо не меняется, либо изменяется на n.

В самом деле, пусть какая-то девочка перебегает из k-го теремка в следующий по часовой стрелке. Тогда в сумме S меняются два слагаемых. Если $k < n$, то меняются k-е и $(k + 1)$-е слагаемые и их сумма становится равной

$$k (a_k - 1) + (k + 1) (a_{k+1} + 1) = ka_k + (k + 1) a_{k+1} + 1,$$

т. е. увеличивается на 1. Если $k = n$, то меняются n-е и первое слагаемые, а их сумма становится равной

$$n (a_n - 1) + 1 (a_1 + 1) = na_n + 1 \cdot a_1 - (n - 1),$$

т. е. уменьшается на $n - 1$.

Наоборот, если девочка перебегает в соседний теремок против часовой стрелки, то сумма или уменьшается на 1, или увеличивается на $n-1$. Таким образом, когда две девочки перебегают одновременно в соседние теремки (в противоположных направлениях), то сумма S или не меняется вовсе, или изменяется на n.

В начальный момент времени в каждом теремке сидело по одной девочке и

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \ldots + n \cdot 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Таким образом, после любого числа перебеганий сумма будет равна $\frac{n(n+1)}{2} + np$,
где p — некоторое целое число.

Если бы все девочки смогли собраться в каком-то q-м теремке, то S была бы равна nq, т. е. выполнялось бы равенство $\frac{n(n+1)}{2} + np = nq$,
откуда

$$n = 2(q-p) - 1.$$

Значит, девочки могут собраться вместе в одном теремке только при нечетном n.

Пример 4. Из числа 1234567891011213...9899100, образованного путем последовательного приписывания друг за другом всех чисел от 1 до 100 включительно, надо вычеркнуть 100 таких цифр, чтобы полученное оставшееся число было наибольшим. Запишем это число.

Решение. Число будет наибольшим, если в старших разрядах будут стоять девятки. В связи с этим вычеркиваем первые восемь цифр, затем цифры чисел от 10 до 18 и единицу у 19 и так далее до цифры 4 у числа 49.

Итак, вычеркнуто $8 + 19 + 19 + 19 + 19 = 84$ цифры. Осталось вычеркнуть еще 16 цифр, а именно цифры чисел 50, 51, ... 56 (14 цифр) и дважды цифру 5 у чисел 57 и 58. Всего, таким образом вычеркнули 100 цифр. Получили число:
9999978596061 ... 9899100.

Пример 5. На доске выписаны числа от 1 до 50 включительно. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать одно — модуль их разности. (Модуль нуля не записываем). После многократного повторения указанного процесса на доске осталось одно число. Можно ли узнать, какое это число?

Решение. Прежде всего ясно, что любое оставшееся на доске число заключено между 0 и 50 (если $0 \leqslant a \leqslant 50$ и $0 \leqslant b \leqslant 50$, то $0 \leqslant |a-b| \leqslant 50$). Покажем, что полученное число обязательно будет нечетным. Для этого проследим за суммой всех чисел, выписанных на доске. В начале она равна $1 + 2 + \ldots + 50 = 25 \cdot 51$, т. е. нечетна. Но замена пары $(a; b)$ на одно число не меняет четность всей суммы, поскольку числа $a+b$ и $|a-b|$ всегда одинаковой четности (или оба четны, или оба нечетны). Поэтому сумма выписанных чисел на каждом шаге, в том числе и на самом последнем, когда останется одно число, будет нечетным числом.

Теперь покажем, что таким последним нечетным числом может быть любое из 25 чисел: 1, 3, 5, ..., 49. В самом деле, пусть мы хотим получить некоторое число $2m+1$ ($m = 0, 1, \ldots, 24$). Разобьем числа от 1 до 50 (включительно) на пары так:

$$(1; 2m+2),\ (2; 3),\ (3; 4),\ \ldots,\ (2m; 2m+1),$$
$$(2m+3; 2m+4),\ \ldots,\ (49; 50).$$

Запишем вместо каждой пары модуль разности входящих в нее чисел. Получим $2m+1$, 1, 1, ..., 1 (всего 24 единицы). Осталось избавиться от единиц. Для этого можно, разбив их на пары, получить 12 нулей, а вместо пары $(2m+1; 0)$ записать одно число $|2m+1-0| = 2m+1$.

УПРАЖНЕНИЯ

190. Взяли три листа бумаги. Некоторые из них (один, или два, или все три) разрезали на три части. Некоторые из образовавшихся кусков снова разрезали на три части, и так несколько раз. При подсчете обнаружилось, что всего имеется 1978 кусков бумаги. Покажите, что подсчет произведен неправильно.

191. Докажите, что среди любых 39 последовательных натуральных чисел обязательно найдется такое, у которого сумма цифр делится на 11.

192. В строку выписаны 1975 произвольных натуральных чисел. Докажите, что всегда найдется несколько рядом стоящих чисел, сумма которых делится на 1975.

193. Из натуральных чисел от 1 до 999 999 включительно выделите те, у которых сумма цифр, стоящих на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах. Докажите, что сумма всех таких чисел делится на 37.

194. Автобусные билеты имеют номера от 000 001 до 999 999. Докажите, что сумма номеров всех билетов, у которых сумма первых трех цифр номера равна сумме трех последних цифр, делится на 1001.

195. Числа от 1 до 2000 включительно выписаны по порядку по кругу. Начиная с первого, вычеркивается каждое пятнадцатое число (1, 16, 31, ...), причем при повторных оборотах зачеркнутые числа снова считаются. Сколько незачеркнутых чисел останется?

196. В квадратной таблице из 64 клеток (8×8) записаны по порядку натуральные числа от 1 до 64, из числа которых выбирается одно и вычеркивается вместе со строкой и столбцом, на пересечении которых оно стоит. Из оставшихся чисел выбирается еще одно и снова вычеркивается вместе с соответствующими строкой и столбцом. Так продолжается до тех пор, пока все строки и столбцы не будут вычеркнуты. Убедитесь, что сумма восьми выбранных таким образом чисел есть величина постоянная, равная 260.

197. На классной доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 1978. Разрешается стереть любые два числа и записать вместо них их разность. После 1977 повторений этой операции на доске останется одно число. Определите, четное оно или нечетное.

198. 250 ребят стоят по кругу. Они выбирают водящего следующим образом: первый остается в круге, второй выходит из круга, третий остается, четвертый выходит и так далее по кругу. Круг все время сужается до тех пор, пока в нем не останется один человек. Узнайте, на каком месте он стоял в первоначальном кругу, считая от первого по часовой стрелке.

199. На шахматной доске в самой левой нижней клетке стоит король. Двое играющих по очереди делают ходы, сдвигая короля на одну клетку или вверх, или вправо, или по диагонали вправо вверх. Выигрывает тот, кто поставит короля в самый верхний правый квадрат. Какой игрок выигрывает, начинающий игру или его партнер, и что беспечивает победу?

200. В углу шахматной доски стоит фигура. Первый игрок может ходить ею два раза подряд как обычным конем (т. е. на два поля в одном направлении, на одно в перпендикулярном), а второй — один раз как конем с удлиненным ходом (т. е. на три поля в одном направлении и на одно в перпендикулярном). Так они ходят по очереди. Первый стремится к тому, чтобы поставить фигуру в противоположный угол, а второй старается ему помешать. Кто из них выиграет?

201. В коробке 27 спичек. Двое играющих берут поочереди одну, две, три или четыре спички. Выигрывает тот, у которого в конце игры окажется четное число спичек. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер?

202. На бумаге в строчку написано несколько минусов. Каждый из двух играющих переправляет один или два минуса на плюсы. Выигрывает тот, кто переправит последний минус. Кто выиграет при правильной игре, начинающий или его партнер, если игра начинается с 7; 8; k минусов? Как надо вести игру, чтобы выиграть?

203. Популярная игра в «крестики-нулики» состоит в следующем. Двое по очереди рисуют на клетчатой бумаге крестики и нулики: первый — крестики, второй — нулики. Выигрывает тот, кто первым поставит определенное число своих знаков в ряд (по вертикали, горизонтали или по диагонали).

Докажите, что второй игрок, как бы хорошо ни играл, не может рассчитывать больше, чем на ничью, если его партнер играет правильно.

204. Яблоки лежат в 500 ящиках, вместимость каждого из которых не более 240 яблок. Докажите, что, по крайней мере, три ящика содержат по одинаковому числу яблок.

205. В ящике лежат 100 яблок четырех сортов, причем каждого сорта поровну. Какое наименьшее число яблок нужно взять наугад, чтобы среди них оказалось не менее 10 яблок одного сорта?

206. Тридцать школьников участвуют в первенстве школы по шахматам. Каждые два участника должны сыграть между собой один раз. Докажите, что в любой момент состязания имеются два участника, сыгравшие к этому моменту одинаковое число партий.

207. У царя Гвидона было трое сыновей. Среди его потомков 93 имели по двое сыновей и ни одной дочери, а все прочие умерли бездетными. Сколько всего потомков было у царя Гвидона?

208. На конгрессе собрались ученые, некоторые из них дружат между собой. Оказалось, что никакие двое ученых, имеющие равное число друзей, не имеют общих друзей. Докажите, что найдется ученый, у которого только один друг.

209. При дворе короля собрались n рыцарей. Некоторые из них враждуют друг с другом, но среди собравшихся у каждого рыцаря не менее $\frac{1}{2}n$ друзей. Докажите, что советник короля может усадить рыцарей за круглым столом так, чтобы рядом с каждым сидели его друзья.

210. В вершинах правильного семиугольника расставлены черные и белые фишки. Докажите, что найдутся три фишки одного цвета, лежащие в вершинах равнобедренного треугольника. Верно ли аналогичное утверждение для правильного восьмиугольника?

211. Можно ли расставить по окружности 20 красных и несколько синих фишек так, чтобы в каждой точке, диаметрально противоположной красной фишке, стояла синяя и никакие две синие фишки не стояли рядом?

212. Имеются восемь шаров: 2 красных, 2 синих, 2 белых и 2 черных. Двое играющих A и B по очереди прибивают шары к вершинам данного куба до тех пор, пока в каждой вершине не окажется по шару. При этом A стремится к тому, чтобы была одна вершина такая, что к этой вершине и к концам выходящих из нее ребер были прикреплены шары всех четырех цветов, а B пытается воспрепятствовать этому. Кто выиграет, если первым делает ход A? А если B?

213*. Среди n одинаковых по внешнему виду монет имеется не более двух фальшивых, отличающихся от остальных по весу (если фальшивых монет две, то считается, что они равны по весу). За три взвешивания нужно определить, имеются ли фальшивые монеты и какие из монет тяжелее — фальшивые или настоящие. Как это сделать, если $n = 8$, $n = 9$?

214*. Имеется девять монет. Из них восемь одного веса, а девятая — фальшивая (несколько легче остальных). Имеется также двое чашечных весов, одни из которых точные, а другие неточные: они показывают равновесие, если даже на чашках лежат монеты (по равному количеству), среди которых фальшивая; если же на одной чашке монет больше, то она перетягивает точно так же, как и у точных весов. По внешнему виду весы одинаковы. Сколько взвешиваний, самое меньшее, нужно произвести, чтобы выявить фальшивую монету?

§ 6. Задачи по геометрии

Пример 1. В равнобедренном треугольнике ABC величина угла при вершине B равна 20°. На боковых сторонах AB и BC взяты соответственно точки D и K так, что $\widehat{KAC} = 50°$, $\widehat{DCA} = 60°$. Вычислить $\widehat{CDK}$.

Решение. Несмотря на кажущуюся на первый взгляд простоту формулировки, задача достаточно трудна, так как непосредственный подсчет величин углов не приводит к ответу. Рассмотрение всех комбинаций углов в конце концов приводит к составлению уравнения с двумя неизвестными. Между тем, сделав дополнительные построения, задачу можно решить несколькими способами, часть из которых позволяет не выходить за рамки программы даже VI класса*.

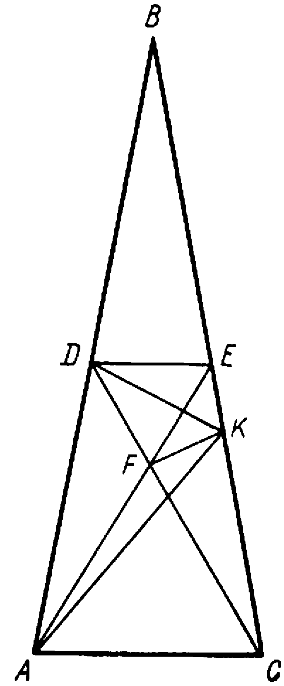

Рис. 8

Покажем два способа решения задачи.

1-й способ. Пусть $|AC| = a$ (рис. 8). Поскольку $\widehat{ACK} = 80°$ и $\widehat{KAC} = 50°$, то $\widehat{AKC} = 50°$ и $|AC| = |KC| = a$. Проведем $[DE] \parallel [AC]$. Получаем: $F = [AE] \cap [DC]$. Треугольники AFC и DEF правильные, поэтому $|FC| = a$, $|DF| = |FE| = |DE|$.

Так как $\widehat{AFC} = 60°$ и $\widehat{CFK} = 80°$, то $\widehat{EFK} = 40° = \widehat{AEC}$.

Поэтому $|FK| = |EK|$. Отсюда $\Delta DFK \cong \Delta DEK$. $[DK]$—биссектриса угла FDE. Значит, $\widehat{CDK} = 30°$.

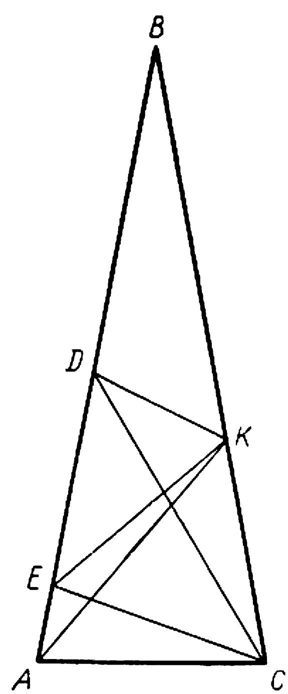

Рис. 9

2-й способ. Построим угол ECA (рис. 9) такой, что $\widehat{ECA} = \widehat{B} = 20°$. Соединим точки E и K. Из подсчета величин углов ($\widehat{AEC}$, $\widehat{AKC}$, $\widehat{ECK}$) следует, что $|AC| = |EC| = |KC| = |EK| = a$.

Поскольку $\widehat{ADC} = 40°$ и $\widehat{ECD} = 40°$, то

* Мы убедительно советуем попытаться самим решить эту задачу, не заглядывая в авторское решение.

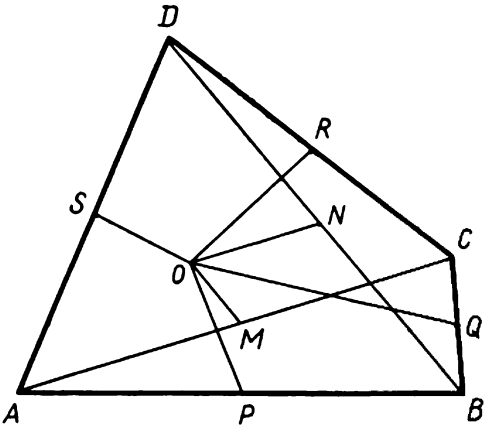

Рис. 10

$|EC| = |ED| = a$. В равнобедренном треугольнике DEK (так как $|DE| = |EK| = a$) $\widehat{DEK} = 180° - (\widehat{KEC} + \widehat{AEC}) = 40°$. Значит $\widehat{EDK} = 70°$, тогда $\widehat{CDK} = 70° - 40° = 30°$.

Пример 2. Дан выпуклый четырехугольник. Найдем внутри него такую точку, чтобы отрезки, соединяющие эту точку с серединами сторон, делили бы четырехугольник на четыре равновеликие части.

Решение. («Черновой» вариант.) Если четырехугольник — параллелограмм (в том числе ромб, квадрат или прямоугольник), то точка пересечения диагоналей является искомой.

Для любого другого выпуклого четырехугольника точка пересечения диагоналей, очевидно, уже не удовлетворяет условию задачи, так же как и точка пересечения «медиан».

Замечаем, однако, что если (рис. 10) построить точку N — середину диагонали $[BD]$, то четырехугольник $NRDS$ (где R — середина $[DC]$, S — середина $[AD]$ гомотетичен данному четырехугольнику $ABCD$, имеет вдвое меньшие линейные размеры и соответственно конгруэнтные углы. Значит, его площадь вчетверо меньше площади $ABCD$.

Итак, одному из условий задачи четырехугольник $NRDS$ удовлетворяет. Но, к сожалению, точка N не является искомой. Поэтому попытаемся преобразовать четырехугольник $NRDS$ в другой равновеликий ему четырехугольник. Таким четырехугольником, видимо, может быть любой четырехугольник, вершина которого N лежит на прямой, проведенной через N параллельно $[SR]$ и, следовательно, параллельно диагонали $[AC]$.

Тогда возникает идея: провести прямую через точку M — середину диагонали $[AC]$ параллельно $[BD]$ до пересечения с соответствующей прямой. Получим точку O. Ясно, что она будет искомой, так как

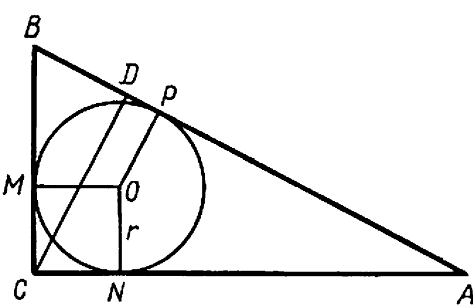

Рис. 11

$$S_{ORDS} = S_{NRDS} = \frac{1}{4} S,$$

где S — площадь четырехугольника $ABCD$,

$$S_{OSAP} = S_{MSAP} = \frac{1}{4} S$$

и т. д.

Отсюда «чистовое» решение. Через середины N и M диагоналей [BD] и [AC] (соответственно) проводим прямые, параллельные соответствующим диагоналям [AC] и [BD] до взаимного пересечения в точке O. Остается доказать, что она искомая. (Доказательство предоставляем читателю.)

Другой точки, кроме указанной, удовлетворяющей условию задачи, нет.

Пример 3. Пусть дано множество T прямоугольных треугольников, у каждого из которых высота, опущенная на гипотенузу, численно равна 1. Докажем, что из каждого такого треугольника можно вырезать круг, площадь которого будет больше 0,5.

Решение. Очевидно, из всех треугольников данного множества нам надо найти треугольник с наименьшим радиусом вписанного в него круга и показать, что площадь этого круга больше 0,5.

Пусть (рис. 11) $|CD| = 1$, $\widehat{A} = \alpha$ и $|ON| = r$.

Поскольку $|AD| = \operatorname{ctg}\alpha$, $|DB| = \operatorname{tg}\alpha$, $|AC| = \frac{1}{\sin\alpha}$, $|BC| = \frac{1}{\cos\alpha}$,

то
$$|AB| = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}. \tag{1}$$

С другой стороны,
$$|AB| = |AP| + |PB| = |AN| + |BM| = (|AC| - r) + \\ + (|BC| - r) = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} - 2r. \tag{2}$$

Из условий (1) и (2) находим:
$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha - (1-\cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Радиус и соответственно площадь вписанного круга будут наименьшими при $\alpha = \frac{\pi}{4}$, когда $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ достигает наибольшего значения. Находим, что при $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$r = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1,$$

$$S = \pi(\sqrt{2} - 1)^2,$$

что больше 0,5.

Пример 4. Можно ли построить на плоскости замкнутую самопересекающуюся ломаную, каждое из звеньев которой пересекается ровно один раз, если она состоит: а) из 999 звеньев; б) из 100 звеньев? (Вершины ломаной не могут лежать на других ее звеньях.)

Решение. Рассмотрим какое-нибудь звено $[AB]$. По условию его пересекает другое звено $[DC]$. Тем самым и $[AB]$ пересекает $[DC]$. Поскольку $[AB]$ и $[CD]$ уже один раз пересечены, то по условию никакие другие звенья уже не могут их пересекать. Каждое из остальных звеньев тоже должно образовывать пару пересекающихся звеньев с каким-то из оставшихся, не пересекаемым другими.

Итак, все звенья разбиваются на пары. Следовательно, число звеньев четно и потому не может быть равно 999.

На рисунке 12 показана часть искомого многоугольника, состоящего из четного числа звеньев. Закон построения остальной части ясен из рисунка.

Пример 5. На плоскости выбраны n точек. Докажем, что если каждый треугольник, образованный тремя из этих точек, «пустой» (т. е. внутри него и на сторонах нет других точек), то все точки являются вершинами некоторого выпуклого n-угольника.

Решение. Пусть M — множество точек A_i ($i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$), удовлетворяющее условию задачи, т. е. такое, что любой треугольник с вершинами в трех различных точках $A_i, A_j, A_k \in M$ не содержит других точек этого множества как внутри треугольника, так и на его границах (сторонах)

$$[A_iA_j],\ [A_jA_k],\ [A_kA_i].$$

Покажем, что точки A_i можно упорядочить так, что полученный многоугольник (например, $A_1A_2 \ldots A_n$) будет выпуклым.

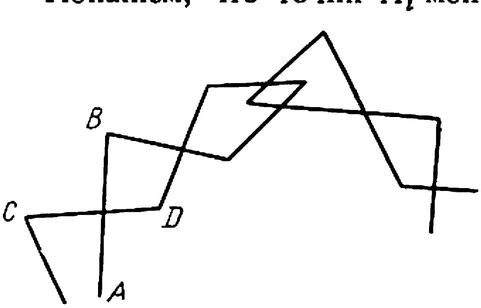

Рис. 12

Выберем ориентированную прямую l, не параллельную ни одной из прямых A_iA_j, причем так, чтобы все точки множества M лежали бы по одну сторону от l, например правее ее. Будем двигать прямую l направо (произвольным образом) до тех пор, пока она не «наткнется» на одну из наших точек, скажем на точку A_1. Полученную прямую l_1 будем поворачивать вокруг точки A_1 до тех пор, пока она не «наткнется» еще на одну из точек — на точку A_2. Получим прямую l_2, которую в свою очередь будем поворачивать в том же направлении вокруг точки A_2 до тех пор, пока она не «наткнется» еще на одну точку — на точку A_3, и т. д. Более чем на две точки сразу прямые l_i наткнуться не могут, так как по условию все точки A_i принадлежат только вершинам треугольника.

Точки $A_i \in M$ расположены только в вершинах полученного многоугольника; кроме вершин, других точек множества M ни одна из сторон многоугольника не содержит.

Остается показать, что полученный многоугольник является выпуклым, т. е. не содержит внутри ни одной точки $A_i \in M$. Для доказательства разобьем многоугольник диагоналями, выходящими из какой-либо одной вершины, на треугольники. Если бы точка, принадлежащая M, находилась внутри многоугольника, то она лежала бы внутри или на стороне одного из треугольников, образованного тремя из данных точек.

Полученное противоречие доказывает, что все n точек являются вершинами выпуклого n-угольника.

Пример 6. На плоскости дано множество M, содержащее 1978 точек, расстояние между любыми двумя из которых не превосходит 1. Докажем, что все эти точки принадлежат кругу радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение. Сначала надо доказать существование круга, окружность которого проходила бы по крайней мере через три из данных точек и который содержал бы в себе все остальные точки данного множества.

Из данных точек выберем одну A такую, чтобы проходящая через нее окружность достаточно большого радиуса образовала бы круг, содержащий все данные точки. Станем постепенно уменьшать радиус этой окружности так, чтобы она, постоянно проходя через A, прошла бы еще через одну точку $B \in M$. Тогда круг, образованный этой второй окружностью, также будет содержать в себе все данные точки. После этого опять станем постепенно уменьшать радиус полученной второй окружности до тех пор, пока она, постоянно проходя через A и B, прошла хотя бы еще через одну точку $C \in M$. Круг, образованный этой окружностью, опять будет содержать в себе все данные точки множества M.

Теперь докажем, что радиус этого круга не превосходит числа $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Пусть $[AB]$ — наибольшая сторона треугольника ABC, т. е. $\widehat{C} \geqslant 60^\circ$ (рис. 13). Опустим перпендикуляр $[OD]$ на $[AB]$. Тогда $|OB|^2 = |OD|^2 + |DB|^2$. Но $|OB| = R$, $|OD| \leqslant \frac{1}{2}R$ (так как

$\breve{AmB} \geqslant 120°$) и $|DB| \leqslant \frac{1}{2}$. Поэтому $R^2 \leqslant \frac{1}{4} R^2 + \frac{1}{4}$. Отсюда $R \leqslant \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Если же $|AB| = |BC| = |AC|$, то $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Задача решена.

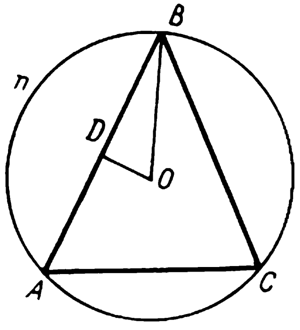

Рис. 13

Пример 7. Докажем, что любой неравносторонний треугольник можно целиком накрыть двумя меньшими, подобными ему треугольниками.

Решение. Пусть $|AB| > > |AC|$ (рис. 14). Построим треугольник $AB'C'$, подобный данному, такой, что

$$\widehat{ACB} = \widehat{B'C'A} \text{ и } |AC'| < |AC| < < |AB'| < |AB|.$$

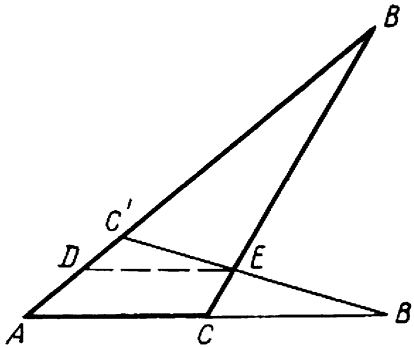

Рис. 14

Проведем через точку $E = = [BC] \cap [B'C']$ прямую DE, параллельную $[AC]$. Получим два подобных треугольника $AB'C'$ и DBE, которые полностью покрывают данный треугольник и которые удовлетворяют условию задачи.

Равносторонний треугольник, очевидно, двумя подобными и меньшими треугольниками покрыть нельзя.

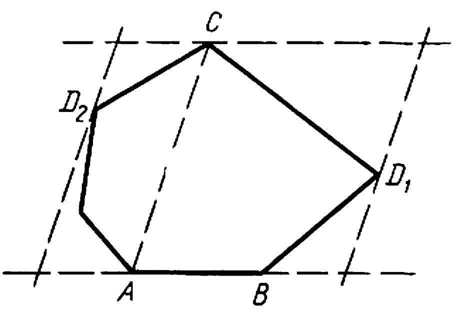

Рис. 15

Пример 8. Докажем, что всякий выпуклый многоугольник, площадь которого равна единице, можно заключить в параллелограмм, площадь которого равна двум.

Решение. Пусть $[AB]$ — некоторая сторона выпуклого многоугольника M, площадь которого равна единице, C — точка многоугольника M, наиболее удаленная от $[AB]$ (рис. 15). Отрезок AC разделил данный многоугольник M на два многоугольника M_1 и M_2. Пусть теперь D_1 и D_2 — точки, наиболее удаленные от $[AC]$. Проведем через C прямую a, параллельную $[AB]$, а через D_1 и D_2 — прямые b и c, параллельные $[AC]$. Получили параллелограмм Π. Так как многоугольники M_1 и M_2 выпуклые, то они полностью содержат в себе треугольники AD_1C и AD_2C. Прямая AC разделила параллелограмм Π на два параллелограмма Π_1 и Π_2.

Очевидно, что

$$S_{АД_1С} = \frac{1}{2} S_{П_1}, \quad S_{АД_2С} = \frac{1}{2} S_{П_2}.$$

Отсюда следует, что

$$S_П = S_{П_1} + S_{П_2} = 2S_{АД_1С} + 2S_{АД_2С} \leqslant 2S_{M_1} + 2S_{M_2} = 2.$$

Пример 9. В прямоугольнике, площадь которого равна пяти, расположены девять многоугольников, площадь каждого из которых равна единице. Докажем, что среди них найдутся два многоугольника, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{9}$.

Решение. Предположим, что площади всех попарных пересечений многоугольников $M_1, M_2, \ldots, M_9$ меньше $\frac{1}{9}$. Тогда получаем, что площадь части многоугольника M_2, не покрытой многоугольником M_1, больше $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$; площадь многоугольника M_3, не покрытая ни многоугольником M_1 и ни многоугольником M_2, больше $1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$ и т. д. Наконец, площадь многоугольника M_9, не покрытая ни одним из многоугольников $M_1, M_2, \ldots, M_8$, больше, чем

$$1 - \underbrace{\frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \ldots - \frac{1}{9}}_{8 \text{ раз}} = \frac{1}{9}.$$

Получаем, что площадь объединения многоугольников $M_1, M_2, \ldots, \ldots, M_9$ в этом случае должна быть больше, чем $1 + \frac{8}{9} + \frac{7}{9} + \ldots + \frac{1}{9} = 5$, что противоречит условию. Это и доказывает утверждение задачи.

УПРАЖНЕНИЯ

215. В треугольнике ABC $\widehat{B} = 15°$, $\widehat{C} = 30°$. Через вершину A проведена прямая, перпендикулярная $[AB]$, до пересечения с $[BC]$ в точке D. Докажите, что $|BD| = 2\,|AC|$.

216. Найдите $\widehat{B}$ треугольника ABC, если высота $[CH]$ равна половине длины стороны $[AB]$, а $\widehat{A} = 75°$.

217. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе $[AB]$ взяты точки E и D так, что $|AE| = |AC|$, $|BD| = |BC|$. Вычислите $\widehat{DCE}$.

218. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$ прямой) проведены биссектрисы $[AD]$ и $[BF]$. Из оснований биссектрис опущены перпендикуляры $[DN]$ и $[FM]$ на гипотенузу. Вычислите $\widehat{MCN}$.

219. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании конгруэнтна одной из сторон. Определите величины углов треугольника.

220. В равнобедренном треугольнике ABC $|AB| = |BC| = b$, $|AC| = a$, $\widehat{B} = 20°$. Докажите, что $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

221. В равнобедренном треугольнике ABC $\widehat{B} = 20°$, $|AB| = |BC|$. На стороне $[BC]$ взята точка D так, что $|BD| = |AC|$. Найдите $\widehat{ADC}$.

222*. Через вершины A и B равнобедренного треугольника ABC, в котором $|AC| = |BC|$, $\widehat{C} = 80°$, проведены два луча, пересекающиеся внутри треугольника в точке O. Найдите $\widehat{BCO}$, если $\widehat{OAB} = 10°$, $\widehat{OBA} = 20°$.

223*. Через вершины A и B равнобедренного треугольника ABC, в котором $|AC| = |BC|$, $\widehat{C} = 80°$, проведены два луча, пересекающиеся внутри треугольника в точке O. Найдите величину угла ACO, если $\widehat{OAB} = 10°$, $\widehat{ABO} = 30°$.

224*. Из трех конгруэнтных квадратов составлен прямоугольник $ABCD$, причем $[AD]$ — большая сторона прямоугольника. Из вершины B проведены три диагонали $[BE]$, $[BF]$ и $[BD]$. Вычислите сумму $\widehat{BEA} + \widehat{BFA} + \widehat{BDA}$.

225*. Высота, биссектриса и медиана, проведенные из вершины B треугольника ABC, разделили угол при его вершине на четыре конгруэнтные части. Найдите величины углов этого треугольника.

226. Пусть M и N — середины противоположных сторон $[BC]$ и $[AD]$ выпуклого четырехугольника $ABCD$. Соединим точку M с точками A и D, точку N с точками B и C. Получим точки $P = [AM] \cap [BN]$ и $Q = [MD] \cap [NC]$. Докажите, что площадь четырехугольника $MQNP$ равна сумме площадей треугольников ABP и CDQ.

227*. Точка внутри равнобедренной трапеции соединена со всеми вершинами. Докажите, что из четырех получившихся отрезков можно сложить четырехугольник, вписываемый в эту трапецию (так, что на каждой стороне лежит по одной вершине четырехугольника).

228. В выпуклом шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ противоположные стороны параллельны. Докажите, что площади треугольников $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ равны.

229. Разрежьте произвольный треугольник на три части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник.

230. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению наибольшей и наименьшей диагоналей.

231. Лист покрыт сеткой квадратов. Можно ли построить:
а) равносторонний треугольник с вершинами в узлах сетки;
б) прямоугольный треугольник с целыми длинами сторон так, чтобы все его вершины совпали с узлами сетки и ни одна сторона не шла по линиям сетки.

232*. Через точку M внутри данного острого угла AOB провести прямую, отсекающую от угла треугольник с наименьшей площадью.

233. Площадь трапеции равна 1. Какую наименьшую величину может иметь большая диагональ этой трапеции?

234*. Диагонали делят выпуклый четырехугольник на четыре треугольника. Известно, что площади трех из них равны 1, 2 и 3. Какой может быть площадь четвертого треугольника?

235. Докажите, что выпуклый 1999-угольник нельзя разрезать на параллелограммы.

236. Докажите, что по крайней мере одно из оснований перпендикуляров, опущенных из произвольно взятой внутренней точки выпуклого многоугольника на его стороны, лежит на самой стороне, а не на ее продолжении.

237. Докажите, что не существует замкнутой линии, пересекающей один и только один раз каждое звено пятиконечной звезды.

238. Докажите, что нельзя провести прямую так, чтобы она пересекала все стороны 1001-угольника.

239. Известно, что замкнутая ломаная линия состоит из 203 звеньев, причем никакие два звена не лежат на одной прямой. Какое наибольшее число точек самопересечения возможно для такой линии?

240. Внутри выпуклого 100-угольника выбрано 30 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. 100-угольник разрезан на треугольники так, что совокупность вершин всех этих треугольников состоит из 30 выбранных точек и 100 вершин данного многоугольника. Сколько получится треугольников?

241. 2000 точек на плоскости расположены так, что любые четыре из них лежат в вершине выпуклого четырехугольника. Докажите, что тогда все точки лежат в вершинах выпуклого 2000-угольника.

242. На плоскости проведены 2000 попарно не параллельных прямых. Через точку пересечения любых двух из этих прямых проходит по меньшей мере еще одна из проведенных прямых. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.

243. Из пяти данных окружностей любые четыре проходят через одну точку. Докажите, что найдется точка, через которую проходят все пять данных окружностей.

244. Точка A лежит внутри шести кругов. Докажите, что центр одного из этих кругов лежит внутри какого-то другого из них.

245. На плоскости выбраны 1000 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Какое наибольшее число непересекающихся четырехугольников, вершинами которых служат эти точки, можно построить?

246. На плоскости расположены 2, 3, ..., n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. На сколько частей разбилась плоскость?

247. В окружность радиуса 1 вписан правильный 1980-угольник. Найдите сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин этого многоугольника.

248. Докажите, что любые 1000 точек плоскости можно разбить на две группы так, что эти группы нельзя отделить одну от другой никакой прямой.

249*. На арене цирка радиуса 10 м бегает лев. Двигаясь по ломаной линии, он пробегает за время представления 500 м. Докажите, что сумма величин всех углов, на которые лев поворачивался, не меньше 48 радиан.

250. На плоскости расположены n точек так, что площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не больше единицы. Докажите, что все эти точки можно поместить в треугольник, площадь которого равна четырем.

251. На плоскости даны 1979 точек. Известно, что из любых трех точек можно выбрать две, расстояние между которыми меньше единицы. Докажите, что среди данных точек найдется 990 точек, лежащих в круге, радиус которого равен единице.

252. В единичном квадрате расположена 51 точка. Докажите, что некоторые три из них обязательно находятся внутри круга, радиус которого равен $\frac{1}{7}$.

253. Дана плоская замкнутая ломаная, периметр которой равен единице. Докажите, что существует круг радиуса $\frac{1}{4}$, содержащий в себе всю ломаную.

254. На плоскости дано 1999 точек. Известно, что среди любых трех из них имеются две, расстояние между которыми не превышает 1. Докажите, что на плоскости можно построить два круга, радиус каждого из которых равен единице и которые закроют все эти точки.

255. Докажите, что любой треугольник, периметр которого равен двум, можно целиком покрыть кругом, радиус которого равен $\frac{1}{2}$.

256. Можно ли покрыть прямоугольник двумя меньшими прямоугольниками, подобными исходному?

257. Докажите, что треугольник, площадь которого равна единице, нельзя заключить в параллелограмм, площадь которого меньше двух.

258. Можно ли любой выпуклый многоугольник, площадь которого равна единице, заключить в треугольник, площадь которого равна двум?

259. Докажите, что параллелограмм, площадь которого равна единице, нельзя заключить в треугольник, площадь которого меньше двух.

260*. На кафтане, площадь которого равна единице, имеются пять заплат. Докажите, что: а) если площадь каждой заплаты не меньше $\frac{1}{2}$, то найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{5}$; б) если площадь общей части любых двух заплат не меньше $\frac{1}{4}$, то найдутся три заплаты, площадь общей части которых не меньше $\frac{3}{40}$.

261. Коридор полностью покрыт несколькими ковровыми дорожками, ширина которых равна ширине коридора. Докажите, что можно снять несколько дорожек так, чтобы оставшиеся не налегали друг на друга и покрывали не менее половины коридора. (Предполагается, что любую дорожку можно изъять, не изменив положения других.)

262. В комнате площадью 6 м^2 постелены на полу три ковра произвольной формы площадью 3 м^2 каждый. Докажите, что какие-нибудь два из этих ковров налегают друг на друга по площади, не меньшей одного квадратного метра.

263. На столе лежат 15 журналов, полностью закрывая его. Докажите, что можно убрать 7 журналов так, чтобы оставшиеся закрывали не менее $\frac{8}{15}$ площади стола.

§ 7. Функция, производная и интеграл

264. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x, & x \leqslant 0, \\ 3 - x, & x > 0. \end{cases}$$

Найдите $f(f(x))$ и постройте ее график.

265. Исследуйте функцию по переменной $x \in \mathbf{R}$.

$$y = 2x - 1 - \sqrt{y^2 - 2xy + 3x - 2}.$$

Постройте ее график.

266. Докажите, что функция

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

возрастает на отрезке [—1; 1] и убывает вне его.

267. Докажите, что

$$f(x) = a^x - b^x, \text{ где } a > b > 1$$

— возрастающая функция для неотрицательного x. Примените свойство этой функции для решения уравнения $5^x - 2^x = 21$.

268. Пусть при некотором фиксированном $a \in \mathbf{R}$ и любом x из области определения функции $f(x)$ выполняется равенство

$$f(x + a) = -\frac{1}{f(x)}.$$

Является ли $f(x)$ периодической функцией?

269. Покажите, что функция

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$$

не ограничена в любой окрестности точки $x = 0$.

270. Дана функция

$$f(x) = \sqrt{x^2 - ax + b^2}, \text{ где } b \geqslant a > 0.$$

Покажите геометрически, что

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = b.$$

271. При каких значениях x и y выражение

$$z = \frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2}$$

принимает наибольшее и наименьшее значения?

272. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$z = x^2 + xy + y^2$$

при условии

$$1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2.$$

273. Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \mathbf{Q}, \\ x^2, & \text{если } x \text{ иррационально}, \end{cases}$$

дифференцируема в точке $x = 0$.

274. Докажите, что функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{n}}, & \text{если } \dfrac{1}{n+1}\leqslant |x|<\dfrac{1}{n},\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}$$

не дифференцируема в точке $x=0$.

275. Укажите функцию $f(x)$, дифференцируемую в точках $x=0$, $x=1$, $x=2$ и разрывную в других точках.

276. Что можно сказать о дифференцируемой функции, если ее производная — периодическая функция?

277. С помощью дифференцирования докажите справедливость тождеств:

а) $\cos^2\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos^2\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos^2 x=\dfrac{3}{2}$;

б) $2\operatorname{arctg} x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi,\ x>1$.

278. С помощью дифференцирования докажите справедливость неравенств:

а) $a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2$ при $a>0$;

б) $2(x^3+6x)>9x^2+4$ при $x>2$;

в) $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ при $a,b,c>0$.

279. С помощью дифференцирования найдите формулы для сумм:

а) $1+4x+9x^2+\ldots+n^2x^{n-1}$;

б) $1+3x^2+5x^4+\ldots+(2n-1)\,x^{2n-2}$.

280. Пешеход находится в точке A покрытого снегом поля на расстоянии l от прямой дороги, ведущей в село B. По снегу пешеход движется со скоростью v км/ч, а по дороге — со скоростью ω км/ч. В какой точке C он должен выйти на дорогу для того, чтобы в кратчайший срок попасть в село B?

281. В равнобедренный треугольник с данной боковой стороной вписана окружность. При какой величине угла при вершине этого треугольника радиус окружности будет наибольшим?

282. Длины двух противоположных ребер тетраэдра равны x, а все остальные имеют длину, равную 1. Выразите объем тетраэдра как функцию от x. При каком x объем тетраэдра имеет наибольшее значение?

283. Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $x\to\int\limits_0^x(s^3-1)\,ds$, принимающая в точке O значение, равное -1. Чему равно $F(-1)$?

284. Докажите, что если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a;\,b]$, то в каждой его точке функция $y=F(x)+\cos x$ имеет производную.

285. Найдите ошибку, допущенную при следующих вычислениях интеграла:

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+2\sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + 3\sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{1+3\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}\operatorname{tg} x)\Big|_0^{\pi} = 0.$$

Как правильно решить?

286. Вычислите интеграл

$$\int_0^{100\pi} \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}\, dx.$$

287. С помощью интегрального исчисления докажите неравенства:

а) $\ln\frac{b}{a} > 2\frac{b-a}{b+a}$, $0 < a < b$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{n+1}}{n(n+1)} < \frac{1}{2}$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. $x=9$. **2.** Если x—основание системы счисления, то из условия следует: $4x^3+6x^2+3x+4=(5x^2+5x+5)\cdot 5+5x^2+3x$. Отсюда $x=7$. **3.** 3 или $2\sqrt{2+\sqrt{13}}$. **4.** 3. **5.** 16. **6.** 12. **7.** 5, 7, 8. **8.** а) $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{1}{2}(-1)^n \arcsin 2(1-\sqrt{2})+\pi n \mid k,\ n\in \mathbf{Z}\right\}$; б) $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi m;\ (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n \mid m,\ n\in\mathbf{Z}\right\}$; в) $\left\{\pm\frac{\pi}{12}+\pi k;\ \pm\frac{5}{12}\pi+\pi t;\ \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}+2\pi n \mid k,t,n\in\mathbf{Z}\right\}$; г) $\left\{4\pi k;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n \mid k,\ n\in\mathbf{Z}\right\}$. **9.** Если $\frac{p}{q}$ — рациональный корень многочлена и $f(0)=a_0$ нечетное, то p — нечетное число. Так как $f(1)\vdots p-q$, то $p-q$ нечетное, q четное. **11.** $x^3-(4R+r)x^2+p^2x-pS=0$, где R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр, S — площадь треугольника. **12.** $8x^3-4x^2-4x+1=0$. **13.** Пусть α, β, γ — корни уравнения. Тогда последовательно можно получить: $\alpha^3=\alpha-1$, $\alpha^4=\alpha^2-\alpha$, $\alpha^8=\alpha^4-2\alpha^3+\alpha^2=\alpha^2-\alpha-2(\alpha-1)+\alpha^2=2\alpha^2-3\alpha+2$, $\alpha^{16}=21\alpha^2-28\alpha+16$. Аналогично записать β^{16} и γ^{16}, а затем, применив формулы Виета, получим: $\alpha^{16}+\beta^{16}+\gamma^{16}=90$. **14.** $S=\frac{1}{4}\sqrt{-k^4+4mk^2-8nk+80}$. Указание: $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c, d — длины сторон, p — периметр четырехугольника. **16.** 1; 9. **17.** а) $\{(1;\ 1;\ 2),\ (1;\ 2;\ 1),\ (2;\ 1;\ 1)\}$; б) любая комбинация тройки чисел: 1; 2; $\frac{1}{2}$. **18.** Один из корней должен равняться $-\frac{p}{2}$. Искомое соотношение $8z=4pq-p^3$. **19.** а) $a^3-4ab+8c=0$; б) $a^2d=c^2$. **20.** $r=\frac{p}{3}\left(q-\frac{2p^2}{9}\right)$. **21.** $q^3-4pqr+8r^2=0$. **22.** 6 или -6. **23.** Пусть $|CA|=x$, тогда $|CD|=\frac{a^2}{x}$, $|AB|=\frac{x^2}{a}$. Уравнение $\frac{x^2}{a}=\sqrt{a^2-\frac{a^4}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{a^4}{x^2}}$, $(x\geqslant a)$, отсюда $x=a\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$. **24.** Пусть $|AE|=x$, $|DC|=y$. Система: $ab=xy$, $(a+y)^2+a^2=(x+b)^2$. Отсюда уравнение $x^4+2bx^3+(b^2-2a^2)x^2-2a^2bx-a^2b^2=0$, которое сводится к квадратному относительно $x^2+bx=z$. Ответ: $|AE|=\frac{2a-b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

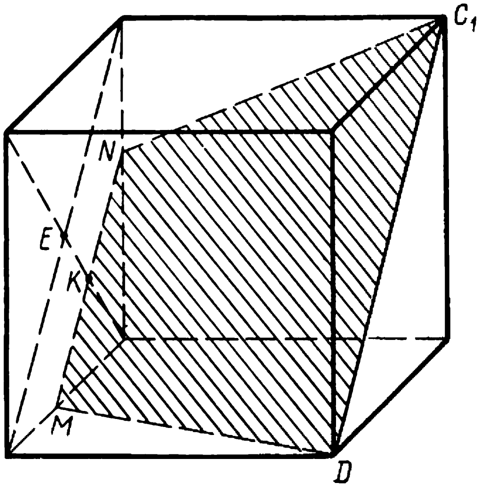

Рис. 16

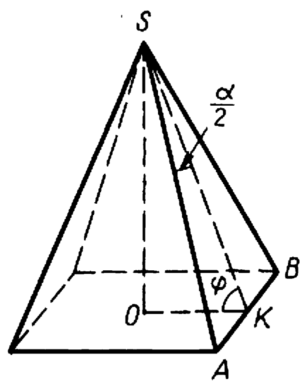

Рис. 17

25. $x=\sqrt{r^2+\frac{a^2+a\sqrt{a^2+8r^2}}{2}}-r$, где x — длина внешней части секущей (AC). **26.** Пусть (рис. 16) DC_1NM — искомое сечение, длина ребра куба равна 1 и $|EK|=x$. Уравнение $(\sqrt{2}-x)\sqrt{1+x^2}=1$, или $x^4-2\sqrt{2}x^3+3x^2-2\sqrt{2}\,x+1=0$ — возвратное. Ответ. $|EK|=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$. **27.** Высота сегмента $h\approx 0{,}7740R$. **28.** Уравнение $x^3-3x+1=0$, где $x=\frac{R}{h}$. Поскольку $1<x<2$, берем $x_0=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$. Имеем: $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{8}$. Положим $x=\frac{3}{2}+z$; $x\approx 1{,}5320$. **29.** $\frac{R}{h}\approx 1{,}5320$. **30.** Пусть $\widehat{ASB}=\alpha$, $\widehat{OKS}=\varphi$ (рис. 17). Но $|OK|=|SK|\cos\varphi$ и $|AK|=|SK|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Отсюда $\cos\varphi=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Учитывая условие $(\alpha=\varphi)$, применив тождество $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}$ и положив $\cos\varphi=x$, получим уравнение $x^3+x^2+x-1=0$. **31.** Пусть β — величина плоского угла при вершине пирамиды. Уравнение $2\sin\frac{\beta}{2}=\cos\frac{3}{2}\beta$, или $z^3+z-6=0$, где $z=2\cos\beta$. Ответ. $\beta\approx 35°10'$. **32.** Пусть γ — величина угла, образованного боковым ребром с плоскостью основания. Уравнение $2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{3}=\operatorname{tg}\frac{4\gamma}{3}$, или $2x^3+x^2-x-1=0$, где $x=\cos\frac{2\gamma}{3}$. Ответ. $\gamma\approx 50°45'$. **33.** $\gamma\approx 64°$, где γ угол наклона бокового ребра к плоскости основания. **34.** а) $\varnothing$; б) $\varnothing$; в) $\{(22; 5)$; $(19; 12)$; $(29; 12)$; $(-29; -12)$; $(-22; -5)$; $(-19; -12)$; $(2; -5)$; $(-2; 5)$; $(26; 13)$; $(-26; -13)$; $(13; 0)$; $(-13; 0)\}$; г) $\{(10; 0)$; $(-10; 0)$; $(17; 3)$; $(1; 3)$; $(-1; -3)$; $(-17; -3)$; $(18; 4)$; $(6; 4)$; $(-6; -4)$; $(-18; -4)$; $(15; 5)$; $(-15; -5)\}$; д) $\{(13; 3)$; $(-13; -3)\}$; е) $\{(0; 0)$; $(2; 2)$; $(0; 1)$; $(1; 0)$; $(2; 1)$; $(1; 2)\}$; ж) $\{(0;0)$; $(-1; 1)$; $(1; -1)\}$; з) $\{(30; 6)$; $(-20; 4)$; $(10; 10)$; $(6; 30)$; $(4; -20)\}$; и) разложить на множители. Ответ. $\{(2; 3)$; $(-2; -3)$; $(4; 3)$; $(-4; -3)$; $(-2; 3)$; $(2; -3)$; $(-4; 3)$; $(4; -3)\}$; к) $\{(2; 1)$; $(-2; -1)$; $(-2; 1)$; $(2; -1)\}$ л) $\left\{\left(mn; \frac{m^2-n^2}{2}; \frac{m^2+n^2}{2}\right)\middle|\, m,\ n \text{ — нечетные целые}\right\}$;

м) $\{(\pm(a^2-2b^2); 2ab; a^2+2b^2) \mid a$ (нечетно) $>0,\ b>0,\ (a,\ b)=1\}$. **35.** е) Выделить два квадрата; з) рассмотреть различную четность чисел x и y;

к) перейти к сравнению по модулю 5. **36.** а) $\left\{\left(2k; \frac{9^k-1}{4}-1\right) \middle| k \in \mathbf{Z}_0\right\}$; б) $\left\{\left(\frac{2}{3}(2k+1)(4^k-1); \frac{2}{3}(4^k-1)\right) \middle| k \in \mathbf{N}\right\}$; в) $\{(0; 2; 1); (3; 3; 2); (3; -3; 2); (\alpha; 2\alpha+1; 1) \mid \alpha \in \mathbf{N}\}$. **37.** а) $\{(1; 3; 2); (7; -1; 0); (1; 2; 3); (7; 0; -1)\}$; б) $\{(6; 6); (-7; -7)\}$; в) $\{(1; 1; 2)\}$. **39.** 24. **40.** $402_5 = 204_7$, $201_5 = 102_7$. **41.** $5776 = 76^2$. **42.** 1951. **43.** Нельзя. **44.** $x_1 = 22k^2 - 14k + 2$ и $x_2 = 22k^2 - 30k + 10$. **46.** 1 и 10. **47.** а) $\varnothing$; б) $-\sqrt{3} < x \leqslant -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} \leqslant x < \sqrt{3}$; в) $\{1\}$; г) $\left\{0; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right\}$; д) $2m+1 \leqslant x < 2m+2$, $m \in \mathbf{Z}$; е) $\{\sqrt[3]{-5}\}$; ж) $\{\sqrt[3]{23}\}$; з) $\left\{1\frac{1}{16}; 1\frac{3}{4}; 2\frac{7}{16}; 3\frac{1}{8}; 3\frac{13}{16}\right\}$; и) $2 \leqslant x < 3$; $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$; $3{,}5 \leqslant x < 6{,}5$; $7 \leqslant x < 8$; $9 \leqslant x < 9{,}5$; к) $2 \leqslant x < 2{,}5$; $3{,}5 < x < 6{,}5$; $7{,}5 \leqslant x < 8$; л) $-1 \leqslant x < 0$; $\sqrt{8} \leqslant x < 3$; $\sqrt{11} \leqslant x < \sqrt{14}$; $4 \leqslant x < \sqrt{17}$; м) $\{(2; 10)\}$; н) 0 и $\frac{3+\sqrt{65}}{14} < x \leqslant \frac{3+\sqrt{93}}{14}$. **48.** $x \in \mathbf{R}$.

49. $\left(\left[\frac{a}{k}\right]+1\right)\left(a - \frac{1}{2}\left[\frac{a}{k}\right] \cdot k\right)$. **51.** $\left[\dfrac{N - \left[\frac{N}{100}\right]}{11}\right]$. **52.** 30. **54.** а) $f(x) = 0$; б) $f(x) = \frac{x^3 - 4x + 8}{2x(x-2)}$; в) заменить x на $\frac{1}{x}$ и исключить $f\left(\frac{1}{x}\right)$. О т в е т. $f(x) = \frac{a^2x^2 - a}{(a^2-1)x}$, $a \neq \pm 1$; г) подставить значения 2, 3, ..., n и сложить полученные равенства. О т в е т. $f(n) = 1 + \frac{a^2(a^{n-1}-1)}{a-1}$, если $a \neq 1$; $f(n) = n$, если $a = 1$; д) аналогично. О т в е т. $f(n) = \frac{\ln n!}{\ln n}$; е) сделать три подстановки: $x = 0$, $y = t$; $x = \frac{\pi}{2} + t$, $y = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2} + t$. О т в е т. $f(x) = a\cos x + b\sin x$. **55.** Выразить $f(x+2m)$, $f(x+3m)$ и $f(x+4m)$ через $f(x)$. **56.** а) $f(x) = e^{ax}$; б) можно заменить в правой части уравнения x на $x + y$, а y на 0. Уравнение сводится к № 53, а; в) положить $x = 0$, $y = t$; $x = t$, $y = 2t$; $x = t$, $y = -2t$ и исключить $f(-t)$ и $f(3t)$. О т в е т. $f(x) = x + a$; г) $f(x) = x + a$; д) $f(x) = x + b$, где $b = \frac{7a-4}{3}$. Проверьте. О т в е т. $f(x) = x + 1$. **58.** а) $\left\{\left(\frac{\pi}{4} + \pi k; -\frac{\pi}{4} - \pi k + 2\pi n\right) \mid k, n \in \mathbf{Z}\right\}$; б) рассмотреть уравнение как квадратное относительно $z = 2^{\sin x}$. Так как корни уравнения действительные, то $y = 0$, $\cos^2 xy = 1$ и $2^{\sin x} = \cos xy$, причем $\cos xy > 0$. О т в е т. $\{(\pi n; 0) \mid n \in \mathbf{Z}\}$; в) $\left\{\left(\pi n - \operatorname{arctg}\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right); \left(\operatorname{arctg}\sqrt{2} + \pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right) \middle| n, k \in \mathbf{Z}\right\}$; г) данное уравнение можно преобразовать к виду: $(2 - \sin^2 2x)\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}\right) = 16 + \sin y$, но $2 - \sin^2 2x \geqslant 1$, $1 + \frac{16}{\sin^4 2x} \geqslant 1 + 16 = 17$, $16 + \sin y \leqslant 17$; получаем систему $\begin{cases} \sin^2 2x = 1, \\ \sin y = 1. \end{cases}$ О т в е т. $\left\{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \middle| k, n \in \mathbf{Z}\right\}$;

д) приведем левую часть уравнения к виду: $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y)^2 + 2(\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y) = (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y)^2 + 2(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y)^2 + 4$, тогда уравнение можно записать:

$$(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y)^2 + 2(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y)^2 + 1 = \sin^2(x+y).$$

Левая часть этого уравнения больше или равна единице, а правая — меньше или равна единице. Поэтому уравнение удовлетворяется в том и только том случае, когда обе части равны единице, т. е. когда совместна система уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y = 0, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 0, \\ \sin^2(x+y) = 1. \end{cases}$$

Ответ. $\left\{\left(\frac{\pi}{4}(2k+1);\ \frac{\pi}{4}(4m-2k+1)\right) \,\middle|\, k, m \in \mathbf{Z}\right\}$. **59.** а) $\{(0;\ 1)\}$; б) $\{(0; 1)\}$; в) пусть $z = x - 1$; неравенство примет вид: $-|y| + z - \sqrt{z^2+2z+y^2} \geqslant 0$. Если $z < 0$, то решений нет. Если же $z \geqslant 0$, то $\sqrt{z^2+2z+y^2} \geqslant \sqrt{z^2} = z$, откуда $z - \sqrt{z^2+2z+y^2} \leqslant 0$. Складывая это неравенство с очевидным неравенством $-|y| \leqslant 0$, имеем: $-|y| + z - \sqrt{z^2+2z+y^2} \leqslant 0$. Условию задачи должны удовлетворять те значения y и z, при которых $-|y| + z - \sqrt{z^2+2z+y^2} = 0$, т. е. $|y| = 0$, $z = \sqrt{z^2+2z}$, откуда $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$. **60.** $x = \pi n$, y произвольное, входящее в область определения $\operatorname{tg} y$, $z = y + \pi m$. **61.** а) Систему свести к неравенству $(x-2)^2 + (2y+1)^2 \leqslant 0$. Ответ. $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$ и $z \leqslant 1{,}5$. **62.** $\{(2; 2; -2)\}$. **64.** Если $(x_0;\ y_0)$ — решение системы, то, как легко заметить, $(-x_0;\ y_0)$ тоже удовлетворяет системе. Значит, $x_0 = 0$. Тогда

$$\begin{cases} 1 = y_0 + a, \\ y_0^2 = 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что y_0 равно либо 1, либо -1 и в соответствии с этим a равно либо 0, либо 2. Далее рассмотреть оба случая. Ответ. $a = 0$. **65.** $x = \sqrt{b}$; $y = 0$; $a = 0$; $0 < b \leqslant 1$. **66.** $a = 1$. **67.** $a = 2$. **68.** $a = 1$. **69.** $a = +1$ или $a = -1$. **70.** 1) $a = 0$, $x = y = \frac{3\pi}{2}$; 2) $a = 2$, $x = y = \frac{\pi}{2}$.

72. а) Записать неравенство $C_1 \geqslant C_0$ для чисел $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_n}{a_1}$. **73.** Использовать № 72, а. **74.** Следует из неравенства $C_1 \geqslant C_{-1}$. **75.** а) Записать неравенство $C_1 \geqslant C_{-1}$ для чисел $\log_x a_1, \log_x a_2, \ldots, \log_x a_n$ и преобразовать, применив формулу модуля перехода. **76.** Заменить $a_i^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ на x_i, $a_i^{\frac{\alpha-\beta}{2}}$ на y_i, тогда $a_i^{\alpha+\beta} = x_i^2$, $a_i^{\alpha-\beta} = y_i^2$, $a_i^{\alpha} = x_i y_i$. Преобразовав, получится неравенство Буняковского — Коши. **77.** а) Применив свойство (пример 1, г) $C_1(a)\ C_1(b) \geqslant C_{\frac{1}{2}}(ab)$, непосредственно получаем исходное неравенство. **79.** $t_{AB} > t_{BA}$. **80.** а) Предварительно доказать, что $\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$, а затем применить свойство $C_1 \geqslant C_0$; б) сначала доказать, что $\operatorname{tg}^2 10^\circ + \operatorname{tg}^2 50^\circ + \operatorname{tg}^2 70^\circ = 9$, затем применить свойство $C_2 \geqslant C_{\frac{3}{2}}$. **82.** Применить неравенство $C_1 \geqslant C_0$ для чисел $[x]$, $\left[x + \frac{1}{2}\right], \ldots, \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$ и учесть тождество $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[xn]$. **83.** Применить неравенство $C_1 \geqslant C_0$ для чисел $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_n)$ и свойство мультипликативности функции Эйлера. **84.** Доказать тождества: $u_1+u_2+\ldots+u_{2n-1}=u_{2n}$; $u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2=u_nu_{n+1}$; $u_1u_2+u_2u_3+\ldots+u_{2n-1}u_{2n}=u_{2n}^2$. **85.** б) Использовать неравенства $\sin\frac{\widehat{A}}{2}\sin\frac{\widehat{B}}{2}\sin\frac{\widehat{C}}{2}\leqslant\frac{1}{8}$ и $C_0 \geqslant C_{-1}$. **86.** а) Предварительно доказать, что $\cos\widehat{A}+\cos\widehat{B}+\cos\widehat{C}\leqslant\frac{3}{2}$, а затем применить неравенство $C_{\frac{1}{n}}\leqslant C_1$ для чисел $\cos\widehat{A}$, $\cos\widehat{B}$, $\cos\widehat{C}$; б) доказать, что $\sin\widehat{A}+\sin\widehat{B}+\sin\widehat{C}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **87.** а) Записать неравенство $C_{-\alpha}\leqslant C_0$ для чисел $\sin\frac{\widehat{A}}{2}$, $\sin\frac{\widehat{B}}{2}$, $\sin\frac{\widehat{C}}{2}$. **88.** а) Предварительно доказать, что $\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$, затем применить неравенство $C_{-\alpha}\leqslant C_0$. **89.** Доказать, что $\sin 2\widehat{A}+\sin 2\widehat{B}+\sin 2\widehat{C}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$ и применить неравенство $C_{\frac{1}{n}}\leqslant C_1$. **90.** Из того, что $\operatorname{tg}\widehat{A}+\operatorname{tg}\widehat{B}+\operatorname{tg}\widehat{C}\geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}\widehat{A}\operatorname{tg}\widehat{B}\operatorname{tg}\widehat{C}}$ и $\operatorname{tg}\widehat{A}+\operatorname{tg}\widehat{B}+\operatorname{tg}\widehat{C}=\operatorname{tg}\widehat{A}\operatorname{tg}\widehat{B}\operatorname{tg}\widehat{C}$, следует: $\operatorname{tg}\widehat{A}\operatorname{tg}\widehat{B}\operatorname{tg}\widehat{C}\geqslant 3\sqrt{3}$. Осталось применить неравенство $C_0\leqslant C_\alpha$ при $\alpha\geqslant 0$. **91.** Сначала доказать, что $\operatorname{ctg}^2\widehat{A}+\operatorname{ctg}^2\widehat{B}+\operatorname{ctg}^2\widehat{C}\geqslant 1$, затем применить неравенство $C_\alpha\geqslant C_2$ при $\alpha\geqslant 2$. **92.** а) Доказать, что $\operatorname{ctg}\frac{\widehat{A}}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\widehat{B}}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\widehat{C}}{2}\geqslant 3\sqrt{3}$, используя тождество $\operatorname{ctg}\frac{\widehat{A}}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\widehat{B}}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\widehat{C}}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\widehat{A}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\widehat{B}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\widehat{C}}{2}$, и применить неравенство $C_\alpha\geqslant C_1$ при $\alpha\geqslant 1$. **93.** Для трех слагаемых левой части исходного неравенства применить свойство $C_1\leqslant C_2$. **94.** Так как $C_{-1}\leqslant C_1$ и $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$ (доказать!), то $r_a+r_b+r_c\geqslant 9r$. Теперь применить неравенство $C_\alpha\geqslant C_1$ при $\alpha\geqslant 1$. **95.** а) Поскольку $r_a=p\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2}$, то $\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}=\frac{1}{p}\left(a\operatorname{ctg}\frac{\widehat{A}}{2}+b\operatorname{ctg}\frac{\widehat{B}}{2}+c\operatorname{ctg}\frac{\widehat{C}}{2}\right)=\frac{4R}{p}\left(\cos^2\frac{\widehat{A}}{2}+\cos^2\frac{\widehat{B}}{2}+\cos^2\frac{\widehat{C}}{2}\right)\leqslant\frac{9R}{p}$. **96.** В неравенстве $\sqrt{x^2+y^2+z^2}<x+y+z\leqslant\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}$ положить $x=\sqrt{p-a}$ и т. п. **97.** а) Имеем: $4S=\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}=\sqrt{(a+b+c)xyz}\leqslant$

$$\leqslant \sqrt{(a+b+c)\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3} = \sqrt{(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} =$$

$= \dfrac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} < \dfrac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}}$. **99.** Записать неравенство $C_{-1} \leqslant C_1$ для чисел $a+b$, $b+c$, $c+a$. **101.** Очевидно, с одной стороны, $|AB| = 2R_3 \times \times \sin\left(\pi - \dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right) = 2R_3 \cos\dfrac{\widehat{C}}{2}$, с другой: $|AB| = 2R\sin\widehat{C}$, отсюда $R_3 = = 2R\sin\dfrac{\widehat{C}}{2}$. Тогда $R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 4R^2\left(\sin^2\dfrac{\widehat{A}}{2} + \sin^2\dfrac{\widehat{B}}{2} + \sin^2\dfrac{\widehat{C}}{2}\right) \geqslant \geqslant 3R^2$, так как $\sin^2\dfrac{\widehat{A}}{2} + \sin^2\dfrac{\widehat{B}}{2} + \sin^2\dfrac{\widehat{C}}{2} \geqslant \dfrac{3}{4}$. Ответ. 3. **102.** Доказать, что $r_1 = \dfrac{r}{\cos^2\dfrac{\widehat{A}}{2}}$ или $r_1 = r\left(1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\widehat{A}}{2}\right)$ и т. п. **103.** Предварительно доказать, что $\dfrac{|AM|}{|A_1M|} + \dfrac{|BM|}{|B_1M|} + \dfrac{|CM|}{|C_1M|} = 3$. **104.** а) Сначала доказать, что $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{h_a - 2r}{h_a} + \dfrac{h_b - 2r}{h_b} + \dfrac{h_c - 2r}{h_c} = 3 - 2r\cdot\dfrac{1}{r} = 1$, затем применить неравенство $C_\alpha \geqslant C_1$ при $\alpha \geqslant 1$. **105.** Нетрудно доказать, что

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{y_1}{y_2} + \frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} = r\cdot\frac{1}{r} = 1.$$

106. Доказать, что $\sum x_i^2 = 12R^2$, $i = 1, 2, 3, 4$. **107.** Имеем: $a_1 + a_2 + a_3 = = 2R\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\widehat{A}}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{\widehat{B}}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{\widehat{C}}{2}\right) \geqslant 6R\sqrt{3}$. **109.** Сначала показать, что перпендикуляр, опущенный из произвольной точки окружности на хорду, есть среднее геометрическое длин перпендикуляров, опущенных из той же точки на касательные, проведенные через концы хорды. Полученные равенства перемножить. **110.** Применяя n раз теорему синусов, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 4R^2\left(\sin^2\alpha + \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) + \ldots + \sin^2\left(\alpha + \frac{n-1}{n}\pi\right)\right) = 2R^2 n,$$

так как

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sin^2\left(\alpha + \frac{\nu-1}{\nu}\pi\right) = \frac{n}{2}.$$

112. Доказать, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. **113.** Доказать, что $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$. **114.** Показать, что $\dfrac{1}{h_1} + \dfrac{1}{h_2} + \dfrac{1}{h_3} + \dfrac{1}{h_4} = \dfrac{1}{r}$, и применить неравенство $C_\alpha \geqslant C_{-1}$ при $\alpha \geqslant -1$. **115.** Пирамиды $ASBC$ и $OSBC$ имеют общее основание, поэтому их объемы относятся как длины высот, проведенных на общее основание. Так как $[A_1O] \parallel [AS]$, то $\dfrac{V_{OSBC}}{V_{ASBC}} = \dfrac{|OA_1|}{|SA|}$. Аналогично записать другие отношения. **116.** Имеем:

$$\frac{|A_1O|}{|AA_1|}=\frac{V_{OBCD}}{V},\quad \frac{|B_1O|}{|BB_1|}=\frac{V_{OADC}}{V}$$

и т. п. Сложив их, получим:

$$\frac{|A_1O|}{|AA_1|}+\frac{|B_1O|}{|BB_1|}+\frac{|C_1O|}{|CC_1|}+\frac{|D_1O|}{|DD_1|}=1.$$

117. Имеем: $V=\frac{1}{3}S(x_1+x_2+\ldots+x_n)$. **118.** Записать теорему синусов для каждой грани. **121.** а) Имеем: $y=\sin x\sin 2x=2\sin^2 x\cos x$. Рассмотрим функцию $y^2=4\sin^4 x\cos^2 x=2(\sin^2 x\sin^2 x\, 2\cos^2 x)\leqslant$ $\leqslant 2\left(\frac{\sin^2 x+\sin^2 x+2\cos^2 x}{3}\right)^3=\frac{16}{27}$, $y_{\max}=\frac{4}{3\sqrt{3}}$ при $\sin^2 x=2\cos^2 x$, т. е. при $x=\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **123.** а) Записать неравенство $C_n\geqslant C_1$ для $\sin^2 x$, $\cos^2 x$; б) $u=2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\right)\leqslant 2\sin\frac{x+y}{2}\left(1+\cos\frac{x+y}{2}\right)=$ $=8\sin\alpha\cos^3\alpha$, где $\alpha=\frac{x+y}{4}$. **125.** $\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2<\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}+\right.$ $\left.+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}\right)^2=(a+b)^2$ $(i=1,2,\ldots,n)$. **126.** $u_{\min}=2k$, $u_{\max}=k\cdot 2^n$.

127. Используя неравенство $C_m\geqslant C_1$, получаем: $y\geqslant 2\left(\frac{\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}+\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}}{2}\right)^m=$ $=2\left(\frac{2+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}}{2}\right)^m\geqslant 2\left(\frac{2+\frac{4}{\sin^2 x+\cos^2 x}}{2}\right)^m=2\cdot 3^m$. **128.** $y_{\min}=$ $=\sqrt{(p-m)^2+(\sqrt{n^2-m^2}+\sqrt{q^2-p^2})^2}$. **129.** Функцию представим в виде

$$y=\underbrace{(1-x)\ldots(1-x)}_{5}(1+x)(1+2x)(1+2x)$$

и применим свойство $C_0\leqslant C_1$; $y_{\max}=1$ при $x=0$. **130.** Использовать неравенство Буняковского — Коши. **131.** $u_{\min}=\frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{1\cdot 2^2\cdot 3^3\ldots n^n}$.

132. $|AC|=\frac{l}{3}$. **133.** Доказать, что $\frac{|PA_1|}{a}+\frac{|PB_1|}{b}+\frac{|PC_1|}{c}=1$. **134.** Сначала доказать, что $\frac{x^2}{bc}=\frac{p-a}{p}$, аналогично записать выражения для y^2 и z^2. Тогда $\frac{x^2}{bc}+\frac{y^2}{ac}+\frac{z^2}{ab}=1$, далее применить свойство $C_\alpha\geqslant C_1$ при $\alpha\geqslant 1$. **136.** Предварительно доказать, что $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}=\sqrt{S}$. **137.** Рассматривая окружности, проходящие через две вершины треугольника и основания соответствующих высот, можно получить:

$$x=a|\cos\widehat{A}|,\quad y=b|\cos\widehat{B}|,\quad z=c|\cos\widehat{C}|.$$

Тогда

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2n}=\cos^{2n}\widehat{A}+\cos^{2n}\widehat{B}+\cos^{2n}\widehat{C}\geqslant 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

138. Для каждого треугольника записать теорему синусов. **139.** Так как $k_1 + k_2 + k_3 = h$, то $k_1^\alpha + k_2^\alpha + k_3^\alpha \geqslant 3\left(\frac{h}{3}\right)^\alpha$. **141.** Пусть x и y — длина и ширина основания параллелепипеда, z — высота. Тогда $xy + 2yz + 2zx = S$. Но $V = xyz$. Исследуем функцию $4V^2 = 4x^2y^2z^2$. Имеем:

$$4x^2y^2z^2 = xy \cdot 2yz \cdot 2zx \leqslant \left(\frac{xy + 2yz + 2zx}{3}\right)^3 = \frac{S^3}{27}.$$

Равенство выполняется при $x = y = 2z = \sqrt{\frac{S}{3}}$. **142.** Из курса физики известно, что сила света в точке выражается формулой $I = k\frac{\sin\alpha}{l^2}$, где k — коэффициент пропорциональности. Так как $r = l\cos\alpha$, то $I = \frac{k}{r^2}\times$ $\times \sin\alpha\cos^2\alpha$. **143.** $\arccos\frac{1+\sqrt{17}}{8}$. **145.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **146.** $3^{1-\alpha}$. **147.** $4^{1-\alpha}$.

148. а) Решим задачу в общем виде:

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n-1)+1}{1\cdot(2n-1)} + \right.$$
$$\left. + \frac{(2n-3)+3}{3(2n-3)} + \ldots + \frac{1+(2n-1)}{(2n-1)\cdot 1}\right).$$

Далее почленно разделить числитель на знаменатель дроби; б) решим задачу в общем виде, обозначив $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Тогда

$$n\cdot S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+k}{k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-k}{k} + 1\right).$$

Отсюда при $n = 101$ получим исходное равенство; в) левая часть равна:

$$\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2\cdot 2k}\right) = \sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2k}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right).$$

Как видим, равенство можно обобщить. **149.** а) $\frac{50}{101}$; б) достаточно заметить, что

$$\frac{1}{2^2} = \frac{2-1}{2^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2},\quad \frac{3}{2^{2^2}} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{2^2}}$$

и т. д. Ответ. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2^{101}}}$. **150.** а) Перемножить два выражения:

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{9999}{10\,000} \text{ и } B = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{9998}{9999},$$

заметив, что $A < B$ и $A^2 < A\cdot B = \frac{1}{10000}$; б) для произведения $1\times$

$\times \underbrace{2\cdot 2}_{2}\cdot\underbrace{3\cdot 3\cdot 3}_{3}\cdot\underbrace{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4}_{4}\dots\underbrace{100\cdot 100\dots 100}_{100}$ применить теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Вычислить сумму квадратов. **151.** а) Записать неравенство $C_{-1} \leqslant C_1$ для чисел $n+1, n+2, \dots, 3n+1$. **152.** Пусть $n = 2^{2N}$. Тогда

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+$$
$$+\dots+\left(\frac{1}{2^{2N-1}+1}+\dots+\frac{1}{2^{2N}}\right) > 1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2}}_{2N \text{ раз}} > N+1$$

(каждая сумма в скобках больше $\frac{1}{2}$ в силу неравенства 151, б). **153.** а) Первая дробь меньше второй; б) $31^{11} < 17^{14}$; в) обе части верного неравенства $90^{10} < 100^{10}$ умножить на 100^{10}; г) первая дробь больше второй; д) за основу взять неравенство $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1} < 2\sqrt{n}$. **154.** Равна 1. **155.** Применить неравенство $C_1 > C_0$ для чисел $\log_4 5$, $\log_5 6$, $\log_6 7$, $\log_7 8$, $\log_8 4$ и записать все эти числа через логарифм по основанию 4. **156.** Обозначить $\sqrt{3}+\sqrt{2} = \alpha$, $\sqrt{6}+1 = \beta$, вычислить $\alpha\cdot\beta$, $\frac{1}{\alpha}$, α^2, β^2. **157.** а) Первые сто знаков этого корня после запятой — девятки. Утверждение следует из неравенства $\underbrace{0{,}99\dots9}_{100 \text{ цифр}} < \sqrt{\underbrace{0{,}99\dots9}_{100 \text{ цифр}}} < 1$. **158.** Представить $(6+\sqrt{37})^{999}$ в виде $(6+\sqrt{37})^{999}+(6-\sqrt{37})^{999}+(\sqrt{37}-6)^{999}$. Первые два члена дают в сумме целое число (показать!). Далее, исходя из неравенства $\sqrt{1+\alpha} < 1+\frac{\alpha}{2}$, получить $(\sqrt{37}-6)^{999} < \frac{1}{10^{999}}$, откуда следует утверждение задачи. **159.** Освободиться от иррациональности в числителе. **160.** $x_1 \approx \frac{1}{4}$, $x_2 \approx 4\cdot 10^6$. **161.** Предположить, что в десятичной записи числа $\sqrt{2}$ начиная с n-го места ($n \leqslant 4\,999\,999$) подряд 5 000 001 раз повторяется одна и та же цифра a. Тогда $\sqrt{2} = \frac{N_1}{10^{n-1}}+\frac{a}{10^n}+\dots+\frac{a}{10^{n+5\,000\,000}}+\frac{r}{10^{n+5\,000\,000}}$, где $N_1 \in \mathbf{N}$, $0 < r < 1$.

Преобразовать это выражение к виду:

$$\sqrt{2} = \frac{N_1}{10^{n-1}}+\frac{a}{9\cdot 10^{n-1}}-\frac{a}{9\cdot 10^{n+5\,000\,000}}+\frac{r}{10^{n+5\,000\,000}} = \frac{p}{9\cdot 10^{n-1}}+R,$$

где $p \in \mathbf{N}$, R — остаток, удовлетворяющий условию:

$$|R| \leqslant \frac{1}{10^{n+5\,000\,000}}.$$

Возвести обе части в квадрат и получить неравенство

$$|R| \geqslant \frac{1}{81\cdot 10^{2n-2}} : \left(\frac{2p}{9\cdot 10^{n-1}}+|R|\right),$$

или

$$|R| \geqslant \frac{1}{9\cdot 10^{n-1}(2p+1)}$$

(учтя, что $R\cdot 9\cdot 10^{n-1} < 1$). Так как $P < 1{,}42\cdot 9\cdot 10^{n-1}$, то после упрощений и ослаблений неравенств получится: $|R| > \frac{4}{10^{n+5\,000\,000}}$, что противоречит ранее полученной оценке. **162.** Допустить противное, что дробь имеет период из n цифр. Так как в натуральном ряде сколь угодно далеко от начала встречаются числа, содержащие подряд n нулей, то период должен состоять из нулей. Аналогичное рассуждение покажет, что период состоит из одних единиц или двоек и т. д. Противоречие. **164.** а) Рассмотреть дробь, знаменатель которой содержит наивысшую степень числа 3; б) если $k < n$, то

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+k}<\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{k+1 \text{ раз}}\leqslant 1.$$

Рассмотрите самостоятельно случай, если $k \geqslant n$. **165.** Сумма дробей равна $\frac{6n^2+6n+1}{n(n+1)(2n+1)}$. Числитель не делится на 6, знаменатель делится. **167.** а) Применить формулу $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$; б) $\frac{3-\sqrt[4]{27}}{6}$. **172.** Да. Например, $a=4-\sqrt{15}$ или $a=-4-\sqrt{15}$. **173.** Сначала показать, что если $(a+b\sqrt{3})^2=c+d\sqrt{3}$, то $(a-b\sqrt{3})^2=c-d\sqrt{3}$. Но при $c=99999$ и $d=111111$ второе равенство не выполняется (почему?). **175.** $u_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$. **176.** Сначала убедиться, что первая последовательность убывающая, а вторая возрастающая. Затем показать существование пределов и их равенство. **177.** Заметить, что $a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$. Отсюда сделать вывод о возрастании и убывании последовательностей, об их ограниченности и о существовании пределов последовательностей. Ответ. $\sqrt{ab}$. **179.** $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$. **180.** а) Положим, $\sqrt[n]{n}-1=\alpha\ (\alpha>0)$. Тогда

$$n=(1+\alpha)^n=1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2+\ldots+\alpha^n.$$

Следовательно,

$$n>\frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2,\quad \alpha^2<\frac{2}{n-1}<\frac{4}{n}\quad (n>2),$$

т. е. $\alpha<\frac{2}{\sqrt{n}}$ и $0<\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}$. Отсюда следует, что искомый предел равен 1; б) показать, что $\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$, например, исходя из неравенств $1\cdot n\geqslant n$, $2\cdot(n-1)\geqslant n, \ldots, k(n-k+1)\geqslant n, \ldots, n\cdot 1\geqslant n$; в) представить в виде произведения двух дробей. Упростить произведение. Ответ. 0. **181.** Умножить и разделить произведение на $2\sin\frac{x}{2^n}$, затем на 2 и т. д. **182.** а) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$. Тогда (после возведения в квадрат) получится уравнение $x^2=2+x$; в) обозначить

$$y_n=2+\left.\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots+\cfrac{1}{2}}}\right\} n \text{ раз}.$$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$. Тогда $y=2+\frac{1}{y}$. Ответ. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2}$. **183.** а) Прибавить и вычесть x^2; б) $(1+x+x^2)(1-x+x^2)(1-x^2+x^4)$. **184.** -1. **185.** Данное уравнение решить относительно x: $x=\cos\alpha \pm i\sin\alpha$. Далее применить формулу Муавра. **186.** $\frac{1}{4} \leqslant a < \frac{1}{2}$, $a=1$. **187.** Сначала показать, что неверно утверждение 3). Ответ. $n=2$, $m=9$; $n=6$, $m=17$. **188.** 2 и $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. **189.** $3+\sqrt{5}$ или 5. **190.** Показать, что общее число образовавшихся листов не может быть четным. **191.** Среди первых 20 чисел найдется два, у которых на конце нуль. Из них, хотя бы у одного, перед нулем стоит не девятка. Обозначим такое число через N, а сумму его цифр — через n. Тогда 11 чисел N, $N+1$, ..., $N+9$, $N+10$ имеют суммы цифр соответственно n, $n+1$, ..., $n+9$, $n+10$. Из них всегда можно составить последовательность чисел, из которых хотя бы одно делится на 11. **193.** Пусть N_i—одно из таких чисел. Очевидно, $N_i' = 999999 - N_i$ обладает тем же свойством, что и N_i (показать!). Если S — сумма всех N_i, то $S = 999999k$ ($k \in \mathbf{N}$). Значит, $S \vdots 37$. **195.** 1600. **197.** Нечетное. **198.** На 245-м месте. **200.** Первый. **205.** 37. **206.** Можно доказать методом от противного. **207.** 189. **209.** Сначала доказать такой факт: пусть на одной скамье сидят k рыцарей, и пусть у каждого из двух крайних среди сидящих рыцарей более половины друзей. Тогда этих k рыцарей можно усадить за круглым столом. **210.** Для 7-угольника найдутся две соседние вершины, в которых стоят фишки одного цвета, пусть это будут вершины A_2 и A_3. Тогда достаточно рассмотреть «противоположную» вершину A_6 и соседние A_1 и A_4. Тогда при любой комбинации черных и белых фишек в этих вершинах найдутся три фишки одного цвета, расположенные в вершинах равнобедренного треугольника. Аналогичное утверждение для правильного 8-угольника неверно (показать!). **211.** Нельзя. **212.** Выигрывает тот, кто ходит вторым. **215.** Провести медиану $[AM]$. **216.** 75°. **217.** 45°. **218.** 45°. **219.** 36° или $\frac{180°}{7}$. **221.** 30°. **222.** Построить точку O', симметричную точке O относительно (CB). Ответ. 20°. **223.** Построить точку O', симметричную точке O относительно (AB). Ответ. 70°. **224.** 90°. **225.** 30° и 60°. **226.** Сначала доказать, что высота $[MM_1]$ равна полусумме длин высот $[BB_1]$ и $[CC_1]$. Значит, $S_{\triangle AMD} = S_{\triangle ABN} + S_{\triangle NCD}$. Вычесть общие части. **227.** Через эту точку P провести отрезок $[A_1B_1]$, конгруэнтный и параллельный $[AB]$. Приложить параллелограмм AA_1B_1B к стороне $[CD]$ так, чтобы точка A совпала с C, а точка B — с D. Точка P перейдет в P_1. Получится трапеция $A_1B_1C_1D_1$, конгруэнтная данной, в которую вписан четырехугольник PCP_1D. **228.** Площадь каждого из треугольников $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ равна $\frac{1}{2}(S_6 + S_T)$, где S_6 — площадь данного шестиугольника, S_T — площадь треугольника T, стороны которого равны разностям длин противоположных сторон шестиугольника и соответственно параллельны этим сторонам. **230.** Данный 8-угольник преобразовать в равновеликий ему прямоугольник со сторонами, конгруэнтными меньшей и большей диагоналям, повернув соответствующим образом «выступающие» треугольники. **231.** а) Нельзя. Показать, что, с одной стороны, площадь треугольника $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ — число иррациональное, с другой — рациональное; б) можно. **232.** Через M провести прямую так, чтобы $|AM| = |MB|$. **233.** $\sqrt{2}$. **234.** 6, $\frac{3}{2}$ или $\frac{2}{3}$. **235.** Покажите, что если многоугольник можно разрезать на параллелограммы, то многоугольник должен содержать четное число сторон. **237.** Всю звезду можно рассматривать как совокупность пяти треугольников, не имеющих общих сторон. Возьмем один из них. Всякая замкнутая линия, не проходящая через вершины этого треугольника, не может пересекать его стороны

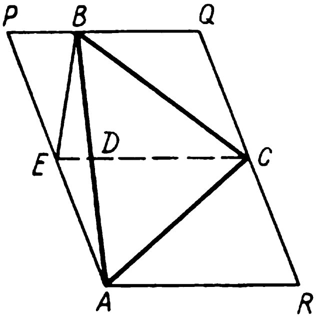

Рис. 18

только четное число раз. Далее ясно. **238.** Заметьте, что если бы такая прямая существовала, то по обе стороны от нее лежало бы одно и только одно число вершин многоугольника. **239.** Общее число точек самопересечения не может превосходить 20300. (Попробуйте указать фигуру, имеющую ровно 20300 точек самопересечения.) **240.** Вычислите сумму внутренних углов всех треугольников. О т в е т. 158. **241.** Можно применить метод индукции. **242.** Допустите противное. Пусть не все прямые проходят через точку O, являющуюся точкой пересечения некоторых двух прямых. Пусть, например, прямая l через O не проходит. Среди точек пересечения прямых, не лежащих на l, выберите ближайшую к l точку A. По условию через нее проходят по меньшей мере три прямые. Пусть эти прямые пересекают l в точках B, C, D. Через C, кроме l и (AC), должна проходить еще одна прямая m, которая пересечет еще одну сторону треугольника ABD в точке E, расположенной ближе к l, чем A. Противоречие. **243.** Пусть окружности C_1, C_2, C_3, C_4 пересекаются в точке A, окружности C_1, C_2, C_3, C_5 — в точке B, окружности C_1, C_2, C_4, C_5 — в точке C. Если A, B, C — различные точки, то окружности C_1, C_2 совпадают. Если же, например, точки A и C совпадают, то общей будет точка A. **244.** Пусть A — общая точка кругов. Соедините A с центрами кругов и рассмотрите наименьший из образовавшихся углов. Покажите, что отрезок, соединяющий центры O_1 и O_2, целиком лежит в одном из кругов. **246.** $1+\frac{n(n+1)}{2}$. **247.** Для каждой вершины многоугольника есть диаметрально противоположная вершина, поэтому из прямоугольных треугольников найдется сумма квадратов расстояний. О т в е т. 3960. **248.** Достаточно убедиться, что четыре точки плоскости всегда можно разбить на две группы с соблюдением требуемых условий; при этом в любой системе $n \geqslant 4$ точек всегда можно (показать!) разбить на две группы с соблюдением требуемых условий какие-либо 4 точки, а все остальные точки распределить между двумя группами совершенно произвольным образом. **250.** Среди всех треугольников с вершинами в данных точках выберите треугольник наибольшей площади $S \leqslant 1$. Через каждую его вершину проведите прямые, параллельные противоположным сторонам выбранного треугольника. Покажите, что площадь полученного треугольника не превосходит $4S \leqslant 4$. Докажите, что этот треугольник накрывает все n точек. **252.** Разбейте квадрат прямыми, параллельными сторонам, на 25 квадратиков. Покажите, что найдется квадратик, в который попали три точки. Останется доказать, что его площадь не превосходит $\frac{\pi}{49}$. **256.** Можно. **257.** Пусть $APQR$ — параллелограмм, содержащий в себе $\triangle ABC$, площадь которого равна 1 (рис. 18). Заметьте, что $S_{\triangle CBD} \leqslant S_{\triangle CBE} = \frac{1}{2} S_{CQPE}$, $S_{\triangle CAD} \leqslant S_{\triangle CAE} = \frac{1}{2} S_{CRAE}$. Отсюда нетрудно получить, что $S_{APQR} \geqslant 2$. **258.** Вписать в данный многоугольник M треугольник ABC наибольшей возможной площади. Постройте $\triangle A_1B_1C_1$, стороны которого проходили бы через A, B и C и были параллельны противоположным сторонам треугольника ABC. Покажите, что M целиком лежит внутри $\triangle A_1B_1C_1$. **259.** Сначала докажите, что квадрат со стороной, равной 1, нельзя заключить ни в какой треугольник площади, меньшей 2. **262.** Пусть первый ковер и второй перекрываются по площади S_1, первый и третий — по площади S_2, второй и третий — по площади S_3, а вместе все — по площади S_4. Покажите, что

$$6 \geqslant 9 - (S_1 + S_2 + S_3) + S_4.$$

264. $3 - |3 - |x||$. **265.** Функция y существует при любом $x \in \mathbf{R}$, и графиком ее является объединение прямой $y = 2x - 1{,}5$ и полупрямой, определяемой системой: $\begin{cases} x = 1, \\ y \leqslant 1. \end{cases}$

266. Пусть $-1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$. Надо доказать, что

$$\frac{x_1}{1 + x_1^2} < \frac{x_2}{1 + x_2^2}.$$

267. Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2$. Надо показать, что $f(x_2) > f(x_1)$, т. е. $f(x)$ возрастает при $x \geqslant 0$. Данное уравнение имеет очевидный корень $x = 2$. Других положительных корней нет, так как функция $g(x) = 5^x - 2^x$ — возрастающая. Нет и отрицательных корней.

268. Имеем: $f(x + 2a) = -\dfrac{1}{f(x + a)} = f(x)$.

270. Постройте равнобедренный треугольник с боковой стороной b и основанием a. На основании $[AC]$ возьмите точку D. Пусть $|AD| = x$. Тогда $f(x) = |BD|$.

271. Представьте z в виде

$$4 - \frac{(y + 2x)^2}{x^2 + y^2}.$$

272. Пусть $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда $1 \leqslant |r| \leqslant \sqrt{2}$ и $z = r^2\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)$, $z_{\min} = \frac{1}{2}$, $z_{\max} = 3$.

273. В обоих случаях при $\Delta x \to 0$ получается, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 0$, т. е. оба предела совпадают.

275. Например,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \mathbf{Q}, \\ x^2(x - 1)^2(x - 2)^2, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

276. Первообразная периодической функции отличается от периодической функции с тем же периодом на линейную функцию.

277. а) Покажите, что производная левой части равна 0; б) Сначала покажите, что $f'(x) = 0$ при $x > 1$, т. е. $f(x) = C$, а затем найдите C, полагая $x = 1$.

278. б) Пусть $f(x) = 2(x^3 + 6x) - 9x^2 - 4$. Тогда $f'(x) = 6(x - 1) \times (x - 2) > 0$ при $x > 2$, т. е. $f(x)$ возрастающая на $[2; \infty[$. Поэтому $f(x) > f(2)$ при $x > 2$;

в) Пусть $0 < a \leqslant b \leqslant c$. Тогда функция $f(x) = x^3 + b^3 + c^3 - 3xbc$ убывает при $0 < x \leqslant b$, так как $f'(x) < 0$. Поэтому $f(a) \geqslant f(b)$, при $0 < a \leqslant b$, т. е. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geqslant 2b^3 + c^3 - 3b^2c$. Затем рассмотрите функцию $\varphi(x) = 2x^3 + c^3 - 3x^2c$ при $0 < x \leqslant c$ и покажите, что $\varphi'(x) < 0$.

279. а) Известно, что

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Продифференцируйте это равенство и результат, умноженный на x, снова продифференцируйте;

б) $$S_n = \frac{1 + x^2 - (2n + 1)x^{2n} + (2n - 1)x^{2n+2}}{(1 - x^2)^2}.$$

281. $2\arcsin\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. **282.** $V=\frac{1}{12}x^2\sqrt{4-2x^2}$. Тогда $V_{\max}=\frac{2\sqrt{3}}{27}$ при $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$. **283.** $-1\frac{11}{20}$. **285.** Ошибка произошла из-за того, что первообразная $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\operatorname{tg}x)$ терпит разрыв в точке $x=\frac{\pi}{2}$. **286.** 200. **287.** а) Площадь S_1 криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=\frac{1}{x}$, равна $\int\limits_a^b\frac{dx}{x}=\ln\frac{b}{a}$. Касательная к кривой $y=\frac{1}{x}$ в точке $\left(\frac{a+b}{2};\ \frac{2}{a+b}\right)$ отсекает трапецию с площадью $S_2=\ 2\frac{b-a}{b+a}$. Но $S_1>S_2$.

б) Разбив отрезок $[0;\ 1]$ точками $x_n=\frac{1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$, впишем в криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y=\sin x$, ступенчатую фигуру. Полученная фигура состоит из прямоугольников с основаниями $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ и высотами $\sin\frac{1}{n+1}$. Поэтому ее площадь S_N равна

$$\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\sin\frac{1}{n+1}}{n(n+1)}.$$

Но

$$S_N<\int\limits_0^1\sin x\,dx=1-\cos 1<\frac{1}{2}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИБ № 1976

Виктор Константинович Смышляев

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Редактор *Л. В. Привезенцева*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *М. И. Смирнова*
Корректор *Т. Ф. Алексина*

Сдано в набор 20.12. 77 г. Подписано к печати 11.05. 78 г. $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага тип. № 3. Литерат. гарн. Высокая печать. Усл. печ. л. 6. Уч.-изд. л. 5,46. Тираж 25 000 экз. Заказ № 454. Цена 20 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

20 к.